

GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT GÖTTINGEN
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK
MATHEMATISCHES INSTITUT

Bachelorarbeit

im Studiengang Mathematik

Untersuchung der Komponenten der Zentrumsvarietät mit Interpolation

zur Erlangung des Grades
Bachelor of Science

Vorgelegt von: Johannes Steiner
Datum: 21. Januar 2011
Matrikelnummer: 20725278
Adresse: Ewaldstraße 31
37075 Göttingen
E-Mail: johannes.steiner@stud.uni-goettingen.de

Betreuer: Prof. Dr. Hans-Christian Graf von Bothmer
Zweitgutachterin: Prof. Dr. Hannah Markwig

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	3
1.1. Das Poincarésche Zentrumsproblem	3
1.2. Ziel dieser Arbeit	5
2. Lifts	6
2.1. Berechnung eines Lifts	10
3. Berechnung von Idealen mit Hilfe von Lifts	13
3.1. Berechnung der Ideale der Komponenten von X_{13}	15
3.2. Graduierung	16
3.3. Berechnung der Lifts	17
3.4. Berechnung der Erzeuger	18
3.5. Suchen der Ideale	19
3.6. Ergebnisse	21
3.6.1. Kodimension der Varietäten	25
3.6.2. Verteilung der Punkte auf den Varietäten	26
3.6.3. Fazit	28
4. Integralkurven und Kofaktoren	30
4.1. Erstes Integral	30
4.2. Kofaktoren	31
4.3. Darboux- und rational reversible Zentren	32
4.4. Berechnung von Integralkurven und Kofaktoren	35
4.4.1. Fazit	38
5. Żołądeks Listen	39
5.1. Verteilung der Familien auf den Komponenten von X_{13}	40
5.1.1. Fazit	42
6. Parametrisierung der Komponenten mit Kodimension 11	43
6.1. Basiswechsel	43
6.2. Ergebnisse	45
6.2.1. Fazit	47
A. Frommers Algorithmus	48
A.1. Der Algorithmus in Charakteristik p	48

B. Weitere Tabellen	49
B.1. Darboux-Zentren und ihre Integralkurven	49
B.2. Żołądeks Listen	61

1. Einleitung

1.1. Das Poincarésche Zentrumsproblem

Der Ausgangspunkt des Poincaréschen Zentrumsproblems ist das System

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -x.\end{aligned}$$

Die Lösungskurven dieses Systems sind konzentrische Kreise um den Ursprung. Wir betrachten nun Störungen dieses Systems der Form

$$\begin{aligned}x' &= y + q(x, y) =: Q(x, y) \\ y' &= -x - p(x, y) =: -P(x, y),\end{aligned}$$

wobei $p(x, y)$ und $q(x, y)$ Potenzreihen mit Ordnung mindestens 2 seien. Als Differentialform dargestellt, erhält man also:

$$\omega := P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Definition 1.1. Differentialformen dieser Art heißen *Poincaré-Differentialformen*.

Notation 1.2. Den Raum aller Poincaré-Differentialformen $\omega = Pdx + Qdy$, für die $\max(\deg P, \deg Q) \leq d$ gilt, nennen wir W^d . Wir schreiben die Differentialformen in W^d als

$$\omega = xdx + ydy + \sum_{2 \leq i+j \leq d} p_{ij}x^i y^j dx + q_{ij}x^i y^j dy$$

Bemerkung 1.3.

$$\dim W^d = 2 \sum_{i=2}^d (i+1) = (d+1)(d+2) - 6$$

Bemerkung 1.4. In dieser Arbeit werden wir uns auf W^3 beschränken.

Definition 1.5. Um die Differentialformen in $K^{(d+1)(d+2)-6}$ zu parametrisieren, sei

$$\begin{aligned}\pi_d: \quad W^d &\rightarrow K^{(d+1)(d+2)-6} \\ \omega &\mapsto (p_{20}, p_{11}, p_{02}, q_{20}, \dots, q_{1,d-1}, q_{0d})^t\end{aligned}$$

Von nun an identifizieren wir also Poincaré-Differentialformen mit Punkten in $K^{(d+1)(d+2)-6}$ und benutzen diese Begriffe analog.

Definition 1.6. Sei ω eine Poincaré-Differentialform. Sind in einer Umgebung des Ursprungs alle Integralkurven geschlossen, so sprechen wir von einem *Zentrum*. Ist dies nicht der Fall, so sprechen wir von einem *Strudel*.

Die Fragestellung des Zentrumspblems ist nun, welche Poincaré-Differentialgleichungen in einer Umgebung des Ursprungs Zentren besitzen. Eine Charakterisierung der Mengen aller Zentren ist bis heute nur für P und Q vom Grad 2 bekannt.

Poincaré zeigte bereits, dass sich für $\omega = Pdx + Qdy$ eine formale Potenzreihe $F = x^2 + y^2 + \sum_{i=3}^{\infty} f_i(x, y)$ finden lässt, die

$$\det \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ P & Q \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} s_j (x^{2j+2} + y^{2j+2}) \quad (1.1)$$

erfüllt, wobei s_j Polynome in den Koeffizienten von P und Q seien. Falls alle s_j verschwinden und F konvergiert, so ist F eine Bewegungskonstante von $Pdx + Qdy$ (Beweis in Satz 4.3). Da F mit $x^2 + y^2$ beginnt, sind die Kurven, die durch $\{(x, y) | F(x, y) = c\}$ gegeben sind, nahe $(0, 0)$ geschlossen. Damit hat ω geschlossene Integralkurven um $(0, 0)$.

Definition 1.7. s_j aus (1.1) heißt die *j-te Strudelgröße* von $\omega = Pdx + Qdy$.

Poincaré zeigte außerdem, dass das Verschwinden der Strudelgrößen eine notwendige Bedingung für die Existenz eines ersten Integrals ist. Frommer, der auch einen Algorithmus zur Berechnung der Strudelgrößen entwickelte (siehe Anhang A), zeigte später, dass auch ohne die Voraussetzung, dass F konvergiert, ω genau dann geschlossene Integralkurven um $(0, 0)$ besitzt, wenn alle Strudelgrößen verschwinden.

Definition 1.8. Wir definieren für die Strudelgrößen s_j :

$$\begin{aligned} I_m &= (s_1, \dots, s_m) \\ I_\infty &= (s_1, s_2, \dots) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X_m &= V(I_m) \\ X_\infty &= V(I_\infty). \end{aligned}$$

Da es unendlich viele Strudelgrößen gibt, ist es im Allgemeinen unmöglich, zu überprüfen, ob alle Strudelgrößen verschwinden. Für den Fall, dass P und Q Polynome endlichen Grades sind, sind die Strudelgrößen aber Polynome in endlich vielen

Variablen und nach Hilberts Basissatz gilt dann, dass I_∞ endlich erzeugt ist. Es gibt also für jeden Grad d ein $m(d) \in \mathbb{N}$, so dass

$$I_\infty = (s_1, \dots, s_{m(d)}).$$

Für $d = 2$ ist $m(d) = 3$, für $d = 3$ ist lediglich bekannt, dass $m(d) \geq 12$ gilt (Beweis in [vBK09]).

I_∞ lässt sich für $d = 2$ folgendermaßen berechnen:

- Berechne s_1, s_2, s_3 und damit $I_3 = (s_1, s_2, s_3)$,
- zerlege I_3 in seine irreduziblen Komponenten,
- zeige für jede Komponente, dass alle ihre Differentialformen geschlossene Integralkurven besitzen.

Im Fall $d = 3$ wäre diese Herangehensweise theoretisch auch möglich, mit heutigen Computern sind die Berechnungen der s_j aber nicht durchführbar, da der Rechenaufwand mit wachsendem j sehr schnell steigt. Bis heute ist es noch nicht praktikabel, s_6 zu berechnen und selbst wenn die Strudelgrößen bis s_{12} bekannt wären, müsste man I_{12} noch in seine irreduziblen Komponenten zerlegen.

1.2. Ziel dieser Arbeit

In dieser Arbeit soll versucht werden, X_{13} für Differentialformen vom Grad 3 über \mathbb{F}_{29} genauer zu charakterisieren, indem einzelne Varietäten berechnet werden, auf denen Teilmengen der Differentialformen liegen. Durch die Charakteristik ist es nicht möglich, s_j für $j \geq 14$ auszuwerten (siehe Anhang A). Aus diesem Grund müssen wir uns auf X_{13} beschränken. Dabei ist es nicht das Ziel, die expliziten Komponenten von X_{13} zu finden, sondern lediglich eine möglichst feine Unterteilung der Form

$$X_\infty = \bigcup_j (X_\infty \cap V(I_j)), \quad (1.2)$$

wobei die Ideale I_j in Kapitel 3 bestimmt werden sollen. Die Differentialformen auf den einzelnen Komponenten werden dann genauer auf ihre Integrierbarkeit (Kapitel 4.4) und mögliche Zusammenhänge mit der (nicht notwendigerweise vollständigen) Unterteilung Żołądka (Kapitel 5) hin untersucht. Schließlich wird in Kapitel 6 noch der Spezialfall der Kodimension 11 näher betrachtet.

Für die Berechnungen wurde das Programm Macaulay2 von [GS] benutzt, das dafür erstellte Package ist unter [Ste11] verfügbar.

2. Lifts

In diesem Kapitel werden wir Lifts einführen, mit deren Hilfe später die Ideale berechnet werden. Die Idee eines Lifts ist, in einer Umgebung eines Punktes auf einer algebraischen Varietät weitere Punkte zu finden.

Notation 2.1. Im Folgenden wird der Einfachheit halber E für $K[\epsilon]$ und E_n für $K[\epsilon]/(\epsilon^n)$ geschrieben, falls der verwendete Körper eindeutig ist.

Wir betrachten von nun an Abbildungen $F: K^m \rightarrow K^k$ eingebettet in den Raum der Abbildungen $E^m \rightarrow E^k$. Seien nun $F: K^m \rightarrow K^k$ eine Abbildung und $x \in K^m$ mit $F(x) = 0$. In diesem Kapitel wird ein Verfahren vorgestellt, um einen Punkt der Form $l = x + \epsilon y_1 + \dots + \epsilon^n y_n$ mit $F(l) = 0 \in E_{n+1}^k$ zu finden.

Definition 2.2. Für einen Multiindex α schreiben wir

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_m} x_m}.$$

Außerdem setzen wir für eine Funktion $F = (f_1 \dots f_k)^t$

$$\underline{D}^\alpha F = (D^\alpha f_1 \dots D^\alpha f_k)^t.$$

Definition 2.3. Für eine Funktion $F: K^m \rightarrow K$ ist der Gradient ∇F definiert als

$$\nabla F = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_m} \right).$$

Die *Jacobi-Matrix* an einem Punkt x ist gegeben durch

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 2.4. Mit diesen Definitionen gilt

$$\sum_{|\alpha|=1} \underline{D}^\alpha F(x) y^\alpha = J_F(x) y.$$

Definition 2.5. Sei $F: K^m \rightarrow K^k$ eine Funktion, $x \in K^m$ mit $F(x) = 0$. Ein Lift von x der Länge n ist ein Ausdruck der Form $l = x + \epsilon y_1 + \dots + \epsilon^n y_n \in E_{n+1}^m$, für den

$$F(l) = 0 \in E_{n+1}^k$$

gilt.

Lemma 2.6. Sei $F: K^m \rightarrow K^k$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$F(x + \epsilon y_1 + \dots + \epsilon^n y_n) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{D^\alpha F(x)}{\alpha!} \cdot (\epsilon y_1 + \dots + \epsilon^n y_n)^\alpha.$$

Beweis. Komponentenweises Einsetzen in die Taylorformel. \square

Lemma 2.7. Es gilt:

1. $(\epsilon y_1 + \dots + \epsilon^{n+1} y_{n+1})^\alpha = (\epsilon y_1 + \dots + \epsilon^n y_n)^\alpha \in E_{n+2}$ für $|\alpha| \geq 2$
2. $(\epsilon y_1 + \dots + \epsilon^n y_n)^\alpha = 0 \in E_{n+1}$ für $|\alpha| \geq n+1$

Beweis.

1. In E_{n+2} gilt

$$\epsilon(\epsilon a_1 + \dots + \epsilon^{n+1} a_{n+1}) = \epsilon(\epsilon a_1 + \dots + \epsilon^n a_n),$$

also

$$\prod_{i=1}^k (\epsilon y_1 + \dots + \epsilon^{n+1} y_{n+1})_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^k (\epsilon y_1 + \dots + \epsilon^n y_n)_i^{\alpha_i},$$

da man aus jedem Faktor ϵ ausklammern kann und es wegen $|\alpha| \geq 2$ mindestens 2 Faktoren gibt.

2. Die niedrigste Potenz, mit der ϵ in $(\epsilon y_1 + \dots + \epsilon^n y_n)^\alpha$ vorkommt, ist $|\alpha|$. \square

Im Folgenden werden einige Begriffe eingeführt, die wir benötigen, um die Existenz von Lifts zu beweisen.

Definition 2.8. Sei $X \subsetneq K^m$ eine algebraische Varietät. Wir setzen

$$I(X) = \{f \in K[x_1, \dots, x_m] \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in X\}.$$

Der Koordinatenring von X ist definiert als

$$\Gamma(X) = K[x_1, \dots, x_n] / I(X).$$

Definition 2.9. Sei X wie oben und $x \in X$. Wir definieren:

$$\mathfrak{m}_{X,x} := \{f \in \Gamma(X) \mid f(x) = 0\}.$$

Ist X klar, schreiben wir auch \mathfrak{m}_x statt $\mathfrak{m}_{X,x}$.

Bemerkung 2.10. $\mathfrak{m}_{X,x}$ ist maximales Ideal in $\Gamma(X)$.

Definition 2.11. Sei X wie oben und $x \in X$. Der lokale Ring von X an x ist definiert als

$$\mathcal{O}_{X,x} := \Gamma(X)_{\mathfrak{m}_{X,x}} = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \Gamma(X), g \notin \mathfrak{m}_{X,x} \right\}.$$

Satz 2.12. Sei $I \subsetneq K[x_1, \dots, x_m] =: R$ ein Ideal wie oben und $x \in V(I)$ ein glatter Punkt auf einer Komponente mit Kodimension c . Dann gibt es Funktionen $g_1, \dots, g_c \in \mathcal{O}_{K^m, x}$ mit $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq c$, so dass lokal

$$(g_1, \dots, g_c) = I(V(I)) = \sqrt{I} \subset \mathcal{O}_{K^m, x}$$

gilt.

Beweis. Setze $X := K^m$ und $Y := V(I)$ und verwende [Sha94, S. 111, Theorem II.3.5]. \square

Lemma 2.13. Sei $I = (f_1, \dots, f_r) \subsetneq K[x_1, \dots, x_m]$, $x \in V(I)$ glatter Punkt auf einer Komponente mit Kodimension c und g_1, \dots, g_c wie in Satz 2.12. Dann gibt es Funktionen h_{ij} mit $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq r$, so dass:

$$f_i = \sum_{j=1}^c h_{ij} g_j \text{ f\"ur } 1 \leq i \leq r$$

Beweis. Es gilt

$$f_i \in I \subset \sqrt{I} = (g_1, \dots, g_c) \text{ f\"ur } 1 \leq i \leq r.$$

\square

Lemma 2.14. F\"ur eine rationale Funktion $h: K^m \rightarrow K$ gilt:

$$h(x + \epsilon R) = h(x) + \epsilon R',$$

wobei $x \in K^m$, $R \in K[\epsilon]^m$ und $R' \in K[\epsilon]$ seien.

Beweis. Offensichtlich gilt f\"ur einen Multiindex α

$$\prod_{i=1}^m (x_i + \epsilon R_i)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^m x_i + \epsilon R''$$

mit $R'' \in E$. Entwickelt man h als Potenzreihe, kann man diese Aussage auf alle Terme anwenden und erh\"alt die Behauptung. \square

Satz 2.15. Seien F und x wie oben und $l = x + \epsilon y_1 + \dots + \epsilon^n y_n$ ein Lift der L\"ange n , also

$$F(l) = r_F \epsilon^{n+1} \in E_{n+1}^k \text{ mit } r_F \in K^k.$$

Dann gilt:

$$r_F \in \text{Im}_K J_F(x).$$

Beweis. Seien g_1, \dots, g_c und h_{ij} mit $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq r$ wie in Satz 2.12 und 2.13 und $r_G \in K^c$, so dass

$$G(l) = r_G \epsilon^{n+1} \in E_{n+2}^c,$$

wobei $G := (g_1 \ \cdots \ g_c)^t$. Da $V(g_1, \dots, g_c)$ in x die Kodimension c hat, sind $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_c(x)$ nach dem Jacobi-Kriterium linear unabhängig und damit ist folgendes Gleichungssystem lösbar:

$$\begin{pmatrix} \nabla g_1(x) \\ \vdots \\ \nabla g_c(x) \end{pmatrix} v = r_G \quad (2.1)$$

Weiter ist

$$\nabla f_i(x) = \nabla \left(\sum_{j=1}^c h_{ij} g_j \right) (x) = \sum_{j=1}^c \nabla h_{ij}(x) \underbrace{g_j(x)}_{=0} + h_{ij}(x) \nabla g_j(x) = \sum_{j=1}^c h_{ij}(x) \nabla g_j(x),$$

also

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & \cdots & h_{1c}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(x) & \cdots & h_{mc}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla g_1(x) \\ \vdots \\ \nabla g_c(x) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Wegen

$$f_i(l) = \sum_{j=1}^c h_{ij}(l) g_j(l).$$

gilt

$$\begin{aligned} F(l) &= \begin{pmatrix} h_{11}(l) & \cdots & h_{1c}(l) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(l) & \cdots & h_{mc}(l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(l) \\ \vdots \\ g_c(l) \end{pmatrix} \\ &= \epsilon^{n+1} \begin{pmatrix} h_{11}(l) & \cdots & h_{1c}(l) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(l) & \cdots & h_{mc}(l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{G1} \\ \vdots \\ r_{Gc} \end{pmatrix} \\ &= \epsilon^{n+1} \begin{pmatrix} h_{11}(x) & \cdots & h_{1c}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(x) & \cdots & h_{mc}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{G1} \\ \vdots \\ r_{Gc} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_{11}(x) & \cdots & h_{1c}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(x) & \cdots & h_{mc}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(l) \\ \vdots \\ g_c(l) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also

$$r_F = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & \cdots & h_{1c}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(x) & \cdots & h_{mc}(x) \end{pmatrix} r_G. \quad (2.3)$$

Mit (2.1), (2.2) und (2.3) folgt, dass das Gleichungssystem

$$J_F(x)v = r_F$$

lösbar ist. □

Bemerkung 2.16. Für singuläre Punkte ist diese Aussage im Allgemeinen falsch.

2.1. Berechnung eines Lifts

Um einen Lift zu berechnen, geht man iterativ vor.

$n = 1$: Sei F wie oben, x ein glatter Punkt auf $V(f_1, \dots, f_k)$ und $J_F(x)$ die Jacobi-Matrix von F an x . Dann gilt in E_2^k :

$$\begin{aligned} F(x + \epsilon y_1) &\stackrel{\text{Lemma 2.6}}{=} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{D^\alpha F(x)}{\alpha!} (\epsilon y_1)^\alpha \\ &= \underbrace{F(x)}_{=0} + \epsilon J_F(x) y_1 + \underbrace{\sum_{|\alpha|=2}^{\infty} \frac{D^\alpha F(x)}{\alpha!} y_1^\alpha \epsilon^{|\alpha|}}_{=0 \in E_2^k, \text{ da } |\alpha| \geq 2} \\ &= \epsilon J_F(x) y_1. \end{aligned}$$

Man muss also $0 \neq y_1 \in \ker J_F(x)$ wählen, um einen Lift der Länge 1 zu erhalten.

$n \geq 2$: Sei $x + y$ mit $y = \epsilon y_1 + \dots + \epsilon^n y_n$ ein Lift der Länge n , also $F(x + y) = 0 \in E_{n+1}^k$. Dann gilt

$$F(x + y) = \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \frac{D^\alpha F(x)}{\alpha!} y^\alpha = r \epsilon^{n+1} \in E_{n+2}^k$$

mit $r \in K^k$. Und weiter in E_{n+2}^k :

$$\begin{aligned}
& F(x + y + \epsilon^{n+1}y_{n+1}) \\
&= J_F(x)(y + \epsilon^{n+1}y_{n+1}) + \sum_{|\alpha|=2}^{\infty} \frac{D^\alpha F(x)}{\alpha!} (y + \epsilon^{n+1}y_{n+1})^\alpha \\
&\stackrel{\text{Lemma 2.7}}{=} \epsilon^{n+1}J_F(x)y_{n+1} + J_F(x)y + \sum_{|\alpha|=2}^{\infty} \frac{D^\alpha F(x)}{\alpha!} y^\alpha \\
&= \epsilon^{n+1}J_F(x)y_{n+1} + F(x + y) \\
&= \epsilon^{n+1}(J_F(x)y_{n+1} + r).
\end{aligned}$$

Wählt man also y_{n+1} so, dass $J_F(x)y_{n+1} = -r$, bekommt man mit $x + y + \epsilon^{n+1}y_{n+1}$ einen Lift der Länge $n + 1$. Nach Satz 2.15 existiert ein solches y_{n+1} , da x ein glatter Punkt ist.

Beispiel 2.17. Sei

$$\begin{aligned}
& F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\
& \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V(F)$$

dann ist

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Setze $y_1 = (1, 1, -2)^t \in \ker J_F(x)$. Man erhält:

$$F(x + \epsilon y_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2^2$$

beziehungsweise:

$$F(x + \epsilon y_1) = \begin{pmatrix} 6\epsilon^2 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_3^2.$$

Setze $y_2 = (0, 0, -3)^t$, damit $J_F(x)y_2 = (-6, 0)^t$. Dann ist:

$$F(x + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2) = \begin{pmatrix} 12\epsilon^3 + 9\epsilon^4 \\ 0 \end{pmatrix} \in E^2$$

und damit

$$F(x + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_3^2$$

$$F(x + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2) = \begin{pmatrix} 12\epsilon^3 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_4^2.$$

Setzt man nun zum Beispiel $y_3 = (-2, -2, -2)^t$, so hat man mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \epsilon^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \epsilon^3 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

einen Lift der Länge 3 konstruiert.

3. Berechnung von Idealen mit Hilfe von Lifts

In diesem Kapitel wollen wir mit Hilfe von Lifts die Ideale berechnen, die uns die Unterteilung von X_{13} liefern sollen. Dafür werden Polynome gesucht, die auf den Lifts verschwinden, indem die Lifts in eine Monombasis eingesetzt werden und der Kern der Koeffizientenmatrix berechnet wird. Um das Verfahren zu verdeutlichen, wird Beispiel 2.17 fortgesetzt:

Beispiel 3.1. Wir verwenden wieder die Abbildung

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

Als Lift verwenden wir eine Fortsetzung des Lifts aus Beispiel 2.17:

$$l = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \epsilon^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \epsilon^3 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \epsilon^4 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -0,5 \end{pmatrix} + \epsilon^5 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$+ \epsilon^6 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1,5 \end{pmatrix} + \epsilon^7 \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \epsilon^8 \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -0,625 \end{pmatrix} + \epsilon^9 \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 4,25 \end{pmatrix}$$

Auf die Länge, die benötigt wird, um brauchbare Ergebnisse zu erhalten, wird später eingegangen. Da wir Polynome vom Grad 2 berechnen wollen, verwenden wir die Monombasis

$$(1, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2).$$

Setzt man l in diese Basis ein, erhält man folgende Koeffizientenmatrix:

	1	x_1	x_2	x_3	x_1^2	x_1x_2	x_1x_3	x_2^2	x_2x_3	x_3^2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ϵ	0	1	1	-2	2	2	-1	2	-1	-4
ϵ^2	0	0	0	-3	1	1	-5	1	-5	-2
ϵ^3	0	-2	-2	-2	-4	-4	-7	-4	-7	8
ϵ^4	0	-2	-2	-5	-8	-8	-5	-8	-5	16
ϵ^5	0	-1	-1	-1	-6	-6	7.5	-6	7.5	12
ϵ^6	0	-3	-3	-1.5	-4	-4	6.5	-4	6.5	8
ϵ^7	0	-4	-4	-1	-6	-6	7.5	-6	7.5	12
ϵ^8	0	-4	-4	-0,625	-8	-8	16,375	-8	16,375	16
ϵ^9	0	-10	-10	4,25	-12	-12	25,125	-12	25,125	24

Will man den Wert eines Monoms ausgewertet an l ablesen, muss man die Spalteneinträge mit den entsprechenden ϵ -Termen multiplizieren und aufsummieren. Der Kern dieser Matrix wird erzeugt durch:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= (0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \\
 v_2 &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^t \\
 v_3 &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0)^t \\
 v_4 &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0)^t \\
 v_5 &= (-3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^t.
 \end{aligned}$$

Als Polynome erhält man damit:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= x_1 - x_2 \\
 P_2 &= x_1^2 - x_1x_2 \\
 P_3 &= x_1^2 - x_2^2 \\
 P_4 &= x_1x_3 - x_2x_3 \\
 P_5 &= 2x_1^2 + x_3^2 - 3.
 \end{aligned}$$

Tatsächlich ist leicht zu sehen, dass

$$(P_1, \dots, P_5) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3, x_1 - x_2).$$

Bemerkung 3.2. Anstatt eines Lifts kann man auch mehrere Lifts berechnen und den Schnitt der Kerne der Koeffizientenmatrizen berechnen, zum Beispiel, indem man die einzelnen Koeffizientenmatrizen zu einer größeren zusammenfasst.

Beobachtung 3.3. Die Zahl und Länge der Lifts, die nötig sind, um mit diesem Verfahren erfolgreich zu sein, ist uns im Allgemeinen nicht bekannt. So hätte es in Beispiel 3.1 bereits genügt, den Lift nur bis zur Länge 4 fortzusetzen.

Für die Berechnungen der Ideale in dieser Arbeit wurden folgende Überlegungen bezüglich der Wahl der Anzahl und Länge der Lifts zugrunde gelegt:

Sei R der Polynomring, in dem die berechneten Polynome liegen sollen, R_d der Unterraum der homogenen Grad- d -Polynome und $R_{\leq d}$ der Unterraum der Polynome vom Grad kleiner gleich d . Will man Polynome vom Grad d berechnen, so erhält man also eine Koeffizientenmatrix mit $\dim R_{\leq d}$ Spalten. (Beziehungweise $\dim R_d$ Spalten bei homogenen Polynomen.)

Die Anzahl der Zeilen, die man mit Lifts l_1, \dots, l_r mit Längen n_1, \dots, n_r erhält, ist $(n_1 + 1) + \dots + (n_r + 1)$.

Die Koeffizienten der konstanten Terme sind immer gleich, da die Lifts immer vom selben Punkt ausgehen, weshalb man nur maximal $n_1 + \dots + n_r + 1$ verschiedene Zeilen erhält.

Um die Gefahr, falsche Polynome zu erhalten, möglichst gering zu halten, sollten also die Anzahl und Längen der Lifts so gewählt werden, dass

$$n_1 + \dots + n_r + 1 \geq m$$

gilt, wobei m die Zahl der Monome, die betrachtet werden, sei. (Im Normalfall also $m = \dim R_d$ oder $m = \dim R_{\leq d}$.)

Bemerkung 3.4. Die oben beschriebene Bedingung ist noch nicht hinreichend, da man nicht weiß, inwiefern die berechneten Lifts voneinander (linear) abhängig sind.

Beobachtung 3.5. Bei höheren Kodimensionen ließ sich beobachten, dass tendenziell längere Lifts benötigt wurden, was damit zu erklären ist, dass die Varietät an der betrachteten Stelle eine geringere Dimension hat und es damit weniger linear unabhängige Lifts gibt.

3.1. Berechnung der Ideale der Komponenten von X_{13}

Um Lifts zu Punkten auf X_{13} zu berechnen, wurde das Programm *centerfocus.exe* aus [vBK10c] verwendet. Wie in Kapitel 2 beschrieben, können Lifts (zuverlässig) nur für glatte Punkte berechnet werden. Wir haben jedoch kein Verfahren, um für einen Punkt sicher zu bestimmen, ob er glatt oder singulär ist. Wir müssen uns deshalb mit einer schwächeren Aussage zufrieden geben:

Notation 3.6. Einen Punkt auf X_{13} nennen wir glatt, falls sich mit *centerfocus.exe* Lifts mit einer Länge von 30 berechnen lassen.

Wir sagen außerdem, ein Punkt habe Kodimension c , falls die Jacobi-Matrix von (s_1, \dots, s_{13}) den Rang c hat.

Bemerkung 3.7. In der Datenbank [vBK10b] gibt es einen Filter, um singuläre Punkte auszusortieren. Dafür wurden Lifts der Länge 14 berechnet. Bei den Berechnungen für diese Arbeit wurden bei den Punkten mit Kodimension 5 bis 10 keine Punkte gefunden, bei denen diese Bedingung nicht auch für unsere Grenze ausreichend war (man beachte, dass nur ein Bruchteil der in der Datenbank vorhandenen Punkte ausgewertet wurde). Bei Kodimension 11 (bei der alle 2760 Punkte untersucht wurden), gab es 6 Punkte, bei denen zwar Lifts bis zu einer Länge von 29 berechnet werden können, darüber hinaus jedoch nicht. Wir gehen deshalb davon aus, dass Lifts der Länge 30 ein ausreichendes Kriterium für Glattheit sind (wobei selbst dies immer noch keine absolute Sicherheit geben kann, da es „Zufallstreffer“ geben könnte).

3.2. Graduierung

Satz 3.8. Sei $\omega \in W^3$, also

$$\omega = xdx + ydy + \sum_{2 \leq i+j \leq 3} p_{ij}x^i y^j dx + q_{ij}x^i y^j dy.$$

Dann gilt für $\lambda \neq 0$

$$(p_{20}, \dots, q_{02}, p_{30}, \dots, q_{03}) \in X_\infty \Leftrightarrow (\lambda p_{20}, \dots, \lambda q_{02}, \lambda^2 p_{30}, \dots, \lambda^2 q_{03}) \in X_\infty.$$

Beweis. Hat $\omega(x, y)$ geschlossene Integralkurven um den Ursprung, so auch $\omega(\lambda x, \lambda y)$ und $\mu\omega(x, y)$, insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) \text{ ist Zentrum} &\Leftrightarrow \omega(\lambda x, \lambda y) \text{ ist Zentrum} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}\omega(\lambda x, \lambda y) \text{ ist Zentrum.} \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}\omega(\lambda x, \lambda y) &= \frac{1}{\lambda} \left(\lambda(xdx + ydy) + \lambda^2(p_{2,0}x^2 dx + \dots + q_{0,2}y^2 dy) \right. \\ &\quad \left. + \lambda^3(p_{3,0}x^3 dx + \dots + q_{0,3}y^3 dy) \right) \\ &= xdx + ydy + \lambda(p_{2,0}x^2 dx + \dots + q_{0,2}y^2 dy) + \lambda^2(p_{3,0}x^3 dx + \dots + q_{0,3}y^3 dy). \end{aligned}$$

□

Wir fassen also X_∞ als projektive Varietät mit gewichteten Graden auf und setzen

$$\begin{aligned} \deg p_{ij} = \deg q_{ij} &= 1 \text{ für } i + j = 2 \\ \deg p_{ij} = \deg q_{ij} &= 2 \text{ für } i + j = 3. \end{aligned}$$

In Macaulay2 wird der entsprechende Ring folgendermaßen definiert:

```
Rpq=K[pp_{2,0}, pp_{1,1}, pp_{0,2}, qq_{2,0}, qq_{1,1}, qq_{0,2},
      pp_{3,0}, pp_{2,1}, pp_{1,2}, pp_{0,3}, qq_{3,0}, qq_{2,1},
      qq_{1,2}, qq_{0,3},Degrees=>{6:1,8:2}];
```

Als Repräsentation der Differentialformen wird eine geschachtelte Liste benutzt:

```
{
  {pp_{2,0}, pp_{1,1}, pp_{0,2}},
  {qq_{2,0}, qq_{1,1}, qq_{0,2}},
  {pp_{3,0}, pp_{2,1}, pp_{1,2}, pp_{0,3}},
  {qq_{3,0}, qq_{2,1}, qq_{1,2}, qq_{0,3}}
}
```

3.3. Berechnung der Lifts

Um die Komponente zu finden, auf der eine Differentialform in X_{13} liegt, werden zunächst Liftpunkte mit Hilfe von Centerfocus berechnet. Dabei wird das Programm centerfocus.exe folgendermaßen aufgerufen:

```
CFAufruf = (Punkt,numLP,Reps) -> (
  progname="centerfocus.exe";
  Fp:=coefficientRing Reps;
  p:=char Fp;
  Laenge:=degree Reps-1;
  CenterFocusParams :=
    "pureSmoothnessTest=true; \n" |
    "characteristic = "|toString(p)|"; \n" |
    "maxFocalValues = 13; \n" |
    "polynomialDegree = 3; \n" |
    "epsPrecision = 0; \n" |
    "requiredVanishedValues = 7; \n" |
    "minJacobianRank = 5; \n" |
    "randomTrialsNum = 0; \n" |
    "randomSeed = -30;\n" |
    "randomSeedFromSysTime = true;\n" |
    "useFormula1 = false; \n" |
    "useFormula2 = false; \n" |
    "useFormula23 = false; \n" |
    "maxLift = "|toString(Laenge)|"; \n" |
    "liftTrials = 2; \n" |
    "numLiftPoints = "|toString(numLP)|"; \n" |
    "L = {"| toString(P) |"}";

  strudelexe := openInOut concatenate("!",progname," - -");
  strudelexe << CenterFocusParams <<closeOut;
```

```

    result:= get strudelexe;
    return result
);

```

Die Länge n der Lifts wird dabei aus dem übergebenen Ring R_{eps} ermittelt und die Liftpunkte werden als geschachtelte Liste mit Einträgen der Form $\sum_{i=0}^n a_i \epsilon^i$, $a_i \in \mathbb{F}_p$ zurückgegeben. Eine genauere Beschreibung bietet die Dokumentation zu *BerechneLP* im Package *LiftpointInterpolation*.

3.4. Berechnung der Erzeuger

Wir wollen nun homogene Polynome finden, die auf den Lifts in E_{n+1} verschwinden. Um alle Polynome vom Grad kleiner gleich d zu finden, berechnen wir für jeden Grad eine Basis des Vektorraumes, der alle Polynome dieses Grades enthält, die auf den Lifts verschwinden und bilden das von all diesen Polynomen erzeugte Ideal.

Notation 3.9. Für die Ideale, die aus Punkten der Kodimension c berechnet wurden, schreiben wir

$$I_{c,i}.$$

Weiterhin schreiben wir

$$V_{c,i}$$

für die Menge aller Punkte aus unserem Stichprobenumfang, die in $V(I_{c,i})$ liegen und die Kodimension c haben. Obwohl die $V_{c,j}$ keine vollständigen Komponenten von X_{13} sind, sondern nur der Schnitt mit der Menge der verwendeten Punkte aus der Datenbank und wir nicht einmal sicher sein können, dass $V(I_{c,j})$ irreduzibel ist (beziehungsweise genau eine Komponente von X_{13} repräsentiert), sprechen wir von nun an von den $V_{c,j}$ als Komponenten.

Notation 3.10. Für einen Polynomring R schreiben wir R_d für den Vektorraum aller homogenen Polynome vom Grad d .

Um die Polynome nun explizit zu berechnen, werden die Lifts in eine Basis von $\mathbb{F}_p[p_{20}, \dots, q_{03}]_d$ eingesetzt und die Koeffizientenmatrix des entstandenen Vektors berechnet:

```

LiftCoeffs = (Lift,d,Rpq) -> (
    Lift=matrix {flatten Lift};
    monRpq:=basis(d,Rpq);
    vec:=sub(monRpq,Lift);
    (mon,mat):=coefficients(vec);
    return mat;
)

```

Die so erhaltenen Matrizen werden aneinander gehängt und ihr Kern mit `syz` berechnet. Die entsprechenden Linearkombinationen der Basiselemente von R_{pq_d} werden zurückgegeben:

```

Erzeuger = (Lifts,d,Rpq) -> (
  mat:=LiftCoeffs(Lifts#0,Rpq);
  for j from 1 to #PunkteListe-1 list (
    mat=mat||LiftCoeffs(Lifts#i,d,Rpq);
  );
  kern := syz sub(mat,Fp);
  return monR*kern;
);

```

Dabei entsteht eine $\dim Rpq_d \times n(l+1)$ -Matrix, wobei n die Anzahl der berechneten Liftpunkte ist und l deren Länge. Da $\dim Rpq_d$ sehr schnell steigt, steigt auch der Rechenaufwand mit steigendem Grad erheblich, vor allem beim Berechnen des Kerns, aber auch schon beim Einsetzen der Lifts in die Basis. Aus diesem Grund wurden für diese Basis meist nur Polynome bis zum Grad 4 berechnet und nur selten Polynome vom Grad 5. In Tabelle 3.1 sind exemplarisch die Zeiten, die für die verschiedenen Operationen an einem Punkt benötigt wurden, aufgelistet.

d	$\dim Rpq_d$	Matrix erzeugen	Kern berechnen
3	104	-- used 2.39615 seconds	-- used 0.79605 seconds
4	330	-- used 11.4087 seconds	-- used 9.47659 seconds
5	916	-- used 41.2346 seconds	-- used 66.8602 seconds

Tabelle 3.1. Dauer der Berechnungen für $n = 20$ und $l = 40$ für einen Punkt mit Kodimension 11 auf einem Intel Core2 Duo T8100 (2.1GHz)

3.5. Suchen der Ideale

Beim Suchen der Ideale wurde wie folgt vorgegangen:

- Berechne für einen Punkt das Ideal bis zum Grad d (meist $d = 4$).
- Überprüfe, ob dieses Ideal bereits bei einem anderen Punkt berechnet wurde. Um den eventuell sehr zeitaufwändigen ==-Vergleich zwischen zwei Idealen möglichst zu vermeiden, gehe dabei für jedes bereits gefundene Ideal in dieser Reihenfolge vor:
 - Überprüfe, ob dieselben Punkte aus der Liste auf diesem Ideal verschwinden,
 - überprüfe, ob die **bet**ti-Listen übereinstimmen,
 - vergleiche die Ideale mit ==.
- Wenn ein neues Ideal gefunden wurde, hänge das Ideal an die Liste an und fahre mit dem nächsten Punkt aus der Liste fort. Ansonsten verwerfe alle Zwischenergebnisse und fahre mit dem nächsten Punkt fort.

Um zu testen, ob dieselben Punkte auf zwei Idealen verschwinden, wurde für jedes Ideal eine Liste berechnet, in der für jeden Punkt entweder eine 1 oder eine 0 enthalten war, je nachdem ob der Punkt in $V(I)$ liegt oder nicht (siehe Funktion *BerechneIndexListe* im Package). Um „Zufallstreffer“, die durch die Charakteristik auftreten können, zu vermeiden, wurde für jeden Punkt immer auch ein Lift der Länge 10 eingesetzt, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Polynom an einem Punkt zufällig verschwindet, stark reduziert wurde, da jetzt alle 11 Koeffizienten nach Einsetzen des Lifts gleich 0 sein müssen. (Siehe auch die Funktion *BerechneLiftListe* im Package.) Für alle Berechnungen und Statistiken wurden nur glatte Punkte berücksichtigt, da sich für singuläre Punkte praktisch keine beliebig langen Lifts berechnen lassen.

Bemerkung 3.11. Bei den Berechnungen der Ideale kam es des Öfteren zu Problemen, die vermutlich durch einen Memoryleak-Bug von Macaulay2 verursacht wurden. Dabei kam es nach einiger Zeit dazu, dass nach einzelnen Operationen wie `betti I` plötzlich deutlich mehr Arbeitsspeicher benötigt wird, so dass das Programm nach kurzer Zeit abbricht. Umgehen kann man dies, indem man die Ergebnisse abspeichert, Macaulay2 neu startet und die Ergebnisse wieder einliest. In einigen Fällen reicht es auch schon, eine `for`-Schleife neu zu starten.

3.6. Ergebnisse

Sowohl die Listen der Ideale als auch die Index-Listen sind in den entsprechenden Ordnern unter [Ste11] so gespeichert, dass sie in Macaulay2 eingelesen werden können.

Für die Ränge 5 bis 10 wurden jeweils 2000 Punkte ausgewertet, was jeweils 30 bis 40 CPU-Stunden benötigte.

Beobachtung 3.12. Bei Rang 11 sind in der Datenbank nur 2754 glatte Punkte gespeichert, so dass es in diesem Fall möglich war, sämtliche Punkte auszuwerten. Versuche haben gezeigt, dass es für rund $\frac{3}{4}$ der Punkte ausreicht, die Ideale nur bis zum Grad 3 zu berechnen und eine feinere Aufteilung in Varietäten auch mit Idealen vom Grad 4 nicht mehr möglich war. Aus diesem Grund wurden zunächst nur die Ideale bis zum Grad 3 berechnet. In einem zweiten Durchgang wurden dann nur noch für die Punkte, bei denen bis Grad 3 nur s_1 als Erzeuger aufgetreten ist, die Ideale bis zum Grad 4 berechnet. Dieses Vorgehen spart sowohl Rechenaufwand als auch Speicherbedarf, der durch die vielen Ideale bei Rang 11 stark ansteigt.

Beobachtung 3.13. Das Laden der 23 Ideale, die bis zum Grad 4 berechnet wurden, führt bei Macaulay2 (in Version 1.31) zu einem zusätzlichen Speicherbedarf von rund 630MB, weshalb Vorsicht geboten ist — vor allem, wenn man die Ideale zu mehreren Kodimensionen hintereinander laden will. Da der von Macaulay2 benutzte Garbage Collector teilweise nicht korrekt zu funktionieren scheint, kann es nämlich dazu kommen, dass die alten Daten nicht verworfen werden, wenn die Ideale überschrieben werden. Diese Beobachtungen wurden bis jetzt nur auf einem System gemacht.

Beobachtung 3.14. Bei Rang 9 und 10 konnten bei $\frac{1}{8}$ bzw. $\frac{1}{16}$ der Punkte bis Grad 4 noch keine Ideale außer (s_1, s_2) bestimmt werden. Für diese Punkte wurden deshalb Ideale bis zum Grad 5 berechnet, mit denen alle Punkte genau einem Ideal ungleich (s_1, s_2) zugeordnet werden konnten. Auch in Fällen, in denen berechnete Komponenten echt ineinander enthalten waren, konnte mit Idealen vom Grad 5 eine disjunkte Aufteilung der Punkte erreicht werden.

Beobachtung 3.15. Die Zahlen der gefundenen Komponenten sind:

- 1 Komponente der Kodimension 5
- 2 Komponenten der Kodimension 6
- 4 Komponenten der Kodimension 7
- 4 Komponenten der Kodimension 8
- 14 Komponenten der Kodimension 9
- 41 Komponenten der Kodimension 10
- 97 Komponenten der Kodimension 11

Bemerkung 3.16. Bei Kodimension 7 gilt $V_{7,3} \subset V_{7,4}$, es sind aber $V_{7,3}$ und $V_{7,4} \setminus V_{7,3}$ ungefähr gleich groß, weshalb $V'_{7,4} := V_{7,4} \setminus V_{7,3}$ als Komponente gewertet wurde.

Alle ausgewerteten Punkte derselben Kodimension können zwar eindeutig den identifizierten Komponenten zugeordnet werden, es gibt jedoch Überschneidungen zwischen Komponenten unterschiedlicher Kodimension. In Tabelle 3.2 sind diese Beziehungen aufgelistet und in Abbildung 3.1 grafisch dargestellt.

Komponente	Varietät	Varietät	Komponente
$V_{5,1}$	$V(I_{6,1})$	$V(I_{6,1})$	$V_{5,1}$
	$V(I_{7,2})$	$V(I_{7,2})$	$V_{5,1}$
	$V(I_{7,4})$		$V_{6,2}$
$V_{6,1}$	$V(I_{7,4})$	$V(I_{7,4})$	$V_{5,1}$
$V_{6,2}$	$V(I_{7,2})$		$V_{6,1}$
	$V(I_{8,3})$		$V_{7,3}$
	$V(I_{9,5})$		$V_{8,3}$
	$V(I_{9,7})$		$V_{8,4}$
	$V(I_{9,11})$		$V_{9,6}$
$V(I_{10,12})$	$V(I_{10,12})$	$V_{9,12}$	
$V_{7,3}$	$V(I_{7,4})$	$V(I_{8,2})$	$V_{10,12}$
$V_{8,2}$	$V(I_{10,12})$		$V_{11,60}$
$V_{8,3}$	$V(I_{7,4})$	$V(I_{8,3})$	$V_{6,2}$
$V_{8,4}$	$V(I_{7,4})$	$V(I_{8,4})$	$V_{9,6}$
$V_{9,6}$	$V(I_{7,4})$		$V_{9,11}$
	$V(I_{8,4})$		$V_{9,12}$
$V_{9,11}$	$V(I_{8,4})$		$V_{10,16}$
$V_{9,12}$	$V(I_{7,4})$		$V_{10,22}$
	$V(I_{8,4})$		$V_{10,25}$
$V_{10,12}$	$V(I_{8,2})$	$V_{10,27}$	
$V_{10,16}$	$V(I_{8,4})$	$V_{11,50}$	
$V_{10,20}$	$V(I_{9,4})$	$V(I_{9,4})$	$V_{10,20}$
$V_{10,22}$	$V(I_{8,4})$	$V(I_{9,5})$	$V_{6,2}$
$V_{10,25}$	$V(I_{8,4})$		$V_{10,28}$
$V_{10,27}$	$V(I_{8,4})$	$V(I_{9,7})$	$V_{6,2}$
$V_{10,28}$	$V(I_{9,5})$	$V(I_{9,11})$	$V_{6,2}$
$V_{11,50}$	$V(I_{8,4})$	$V(I_{10,12})$	$V_{6,2}$
$V_{11,60}$	$V(I_{8,2})$		$V_{8,2}$
	$V(I_{10,12})$		$V_{11,60}$

Tabelle 3.2. In der linken Tabelle sind für jede Komponente die Varietäten aufgelistet, in denen die Komponente liegt. Rechts sind umgekehrt für die Varietäten die enthaltenen Komponenten aufgelistet. (Die Relation $V_{c,j} \subset V(I_{c,j})$ wurde ausgelassen.)

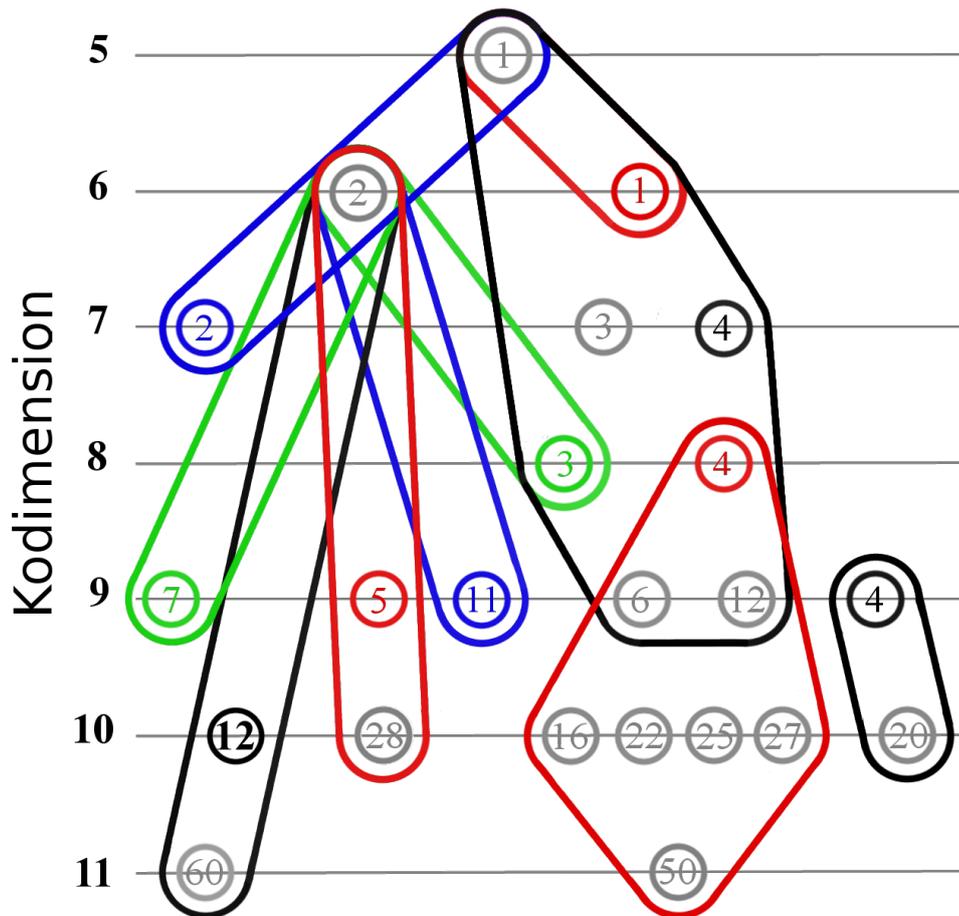


Abbildung 3.1. Die Komponenten $V_{c,j}$ sind als Kreise in der entsprechenden Zeile c dargestellt. Die Umrandungen entsprechen den Varietäten $V(I_{c,j})$, sie beinhalten jeweils die Komponenten, die auf $V(I_{c,j})$ liegen. $V_{c,j}$ und $V(I_{c,j})$ haben jeweils dieselbe Farbe. Die Varietäten, die keine anderen Komponenten enthalten sowie die Komponenten, die auf genau einer Varietät liegen, sind nicht aufgeführt.

Diese Überschneidungen sind jedoch kein Problem für die Aufteilung in Komponenten, da die Punkte unterschiedlicher Kodimension schon von vorne herein auf verschiedenen Komponenten liegen.

3.6.1. Kodimension der Varietäten

Wie oben bereits beschrieben, sind die $V(I_{c,j})$ nicht zwangsläufig Untervarietäten von X_{13} . Die Kodimension dieser Varietäten kann ein Indiz dafür sein, wie „genau“ die Komponenten angenähert wurden: Je näher die Kodimension von $V(I_{c,j})$ in x an der Kodimension von X_{13} in x ist, desto besser ist die Annäherung. Im Folgenden sind daher die Ränge der Jacobi-Matrizen an den Punkten auf $V_{c,j}$ aufgelistet.

Varietät	rk $J(x)$	Varietät	rk $J(x)$	Varietät	rk $J(x)$	Varietät	rk $J(x)$
$V(I_{5,0})$	5	$V(I_{6,1})$	6	$V(I_{7,1})$	11×4	$V(I_{8,1})$	8
		$V(I_{6,2})$	1×5		17×5	$V(I_{8,2})$	3
			933×6		418×7	$V(I_{8,3})$	8
				$V(I_{7,2})$	2×4	$V(I_{8,4})$	20×3
				490×5	7		469×6
				$V(I_{7,3})$	7		
				$V(I_{7,4})$	4		

Tabelle 3.3. Kodimension 5–8. Die rechte Spalte enthält die Ränge der Jacobi-Matrizen der Ideale $I_{c,j}$ an den Punkten auf $V_{c,j}$. Wo nicht anders angegeben, ist der Rang bei allen Punkten gleich.

Varietät	rk $J(x)$	Varietät	rk $J(x)$	Varietät	rk $J(x)$	Varietät	rk $J(x)$
$V(I_{9,1})$	1×5	$V(I_{10,1})$	10	$V(I_{10,18})$	10	$V(I_{10,34})$	10
	130×6	$V(I_{10,2})$	10	$V(I_{10,19})$	10	$V(I_{10,35})$	10
$V(I_{9,2})$	7	$V(I_{10,3})$	6	$V(I_{10,20})$	10	$V(I_{10,36})$	10
$V(I_{9,3})$	6×8	$V(I_{10,4})$	3	$V(I_{10,21})$	10	$V(I_{10,37})$	10
	128×9	$V(I_{10,5})$	10	$V(I_{10,22})$	10	$V(I_{10,38})$	10
$V(I_{9,4})$	6	$V(I_{10,6})$	10	$V(I_{10,23})$	10	$V(I_{10,39})$	10
$V(I_{9,5})$	3	$V(I_{10,7})$	10	$V(I_{10,24})$	10	$V(I_{10,40})$	10
$V(I_{9,6})$	9	$V(I_{10,8})$	9	$V(I_{10,25})$	10	$V(I_{10,41})$	10
$V(I_{9,7})$	3	$V(I_{10,9})$	10	$V(I_{10,26})$	10		
$V(I_{9,8})$	9	$V(I_{10,10})$	10	$V(I_{10,27})$	10		
$V(I_{9,9})$	9	$V(I_{10,11})$	10	$V(I_{10,28})$	10		
$V(I_{9,10})$	9	$V(I_{10,12})$	3	$V(I_{10,29})$	3×4		
$V(I_{9,11})$	3	$V(I_{10,13})$	5		39×5		
$V(I_{9,12})$	9	$V(I_{10,14})$	10	$V(I_{10,30})$	10		
$V(I_{9,13})$	9	$V(I_{10,15})$	6	$V(I_{10,31})$	10		
$V(I_{9,14})$	1×7	$V(I_{10,16})$	10	$V(I_{10,32})$	10		
	114×9	$V(I_{10,17})$	10	$V(I_{10,33})$	10		

Tabelle 3.4. Kodimension 9–10. Notation wie in Tabelle 3.3.

Varietät	rk $J(x)$	Varietät	rk $J(x)$	Varietät	rk $J(x)$	Varietät	rk $J(x)$
$V(I_{11,1})$	8	$V(I_{11,24})$	11	$V(I_{11,50})$	11	$V(I_{11,75})$	11
$V(I_{11,2})$	3×10	$V(I_{11,25})$	7	$V(I_{11,51})$	1×10	$V(I_{11,76})$	11
	22×11	$V(I_{11,26})$	9		43×11	$V(I_{11,77})$	11
$V(I_{11,3})$	3×7	$V(I_{11,27})$	5	$V(I_{11,52})$	3	$V(I_{11,78})$	11
	23×8	$V(I_{11,28})$	5	$V(I_{11,53})$	11	$V(I_{11,79})$	11
$V(I_{11,4})$	11	$V(I_{11,29})$	11	$V(I_{11,54})$	9	$V(I_{11,80})$	11
$V(I_{11,5})$	3	$V(I_{11,30})$	3	$V(I_{11,55})$	11	$V(I_{11,81})$	11
$V(I_{11,6})$	7	$V(I_{11,31})$	5	$V(I_{11,56})$	11	$V(I_{11,82})$	11
$V(I_{11,7})$	3	$V(I_{11,32})$	7	$V(I_{11,57})$	5	$V(I_{11,83})$	11
$V(I_{11,8})$	11	$V(I_{11,33})$	11	$V(I_{11,58})$	11	$V(I_{11,84})$	11
$V(I_{11,9})$	7	$V(I_{11,34})$	11	$V(I_{11,59})$	5	$V(I_{11,85})$	11
$V(I_{11,10})$	11	$V(I_{11,35})$	11	$V(I_{11,60})$	11	$V(I_{11,86})$	11
$V(I_{11,11})$	5	$V(I_{11,36})$	11	$V(I_{11,61})$	11	$V(I_{11,87})$	11
$V(I_{11,12})$	11	$V(I_{11,37})$	3	$V(I_{11,62})$	11	$V(I_{11,88})$	11
$V(I_{11,13})$	5	$V(I_{11,38})$	3	$V(I_{11,63})$	3	$V(I_{11,89})$	11
$V(I_{11,14})$	3	$V(I_{11,39})$	11	$V(I_{11,64})$	11	$V(I_{11,90})$	11
$V(I_{11,15})$	11	$V(I_{11,40})$	11	$V(I_{11,65})$	3	$V(I_{11,91})$	11
$V(I_{11,16})$	7	$V(I_{11,41})$	11	$V(I_{11,66})$	5	$V(I_{11,92})$	11
$V(I_{11,17})$	11	$V(I_{11,42})$	7	$V(I_{11,67})$	3	$V(I_{11,93})$	11
$V(I_{11,18})$	5	$V(I_{11,43})$	3	$V(I_{11,68})$	11	$V(I_{11,94})$	11
$V(I_{11,19})$	3	$V(I_{11,44})$	11	$V(I_{11,69})$	11	$V(I_{11,95})$	11
$V(I_{11,20})$	7	$V(I_{11,45})$	11	$V(I_{11,70})$	7	$V(I_{11,96})$	11
$V(I_{11,21})$	7	$V(I_{11,46})$	3	$V(I_{11,71})$	3	$V(I_{11,97})$	11
$V(I_{11,22})$	1×10	$V(I_{11,47})$	7	$V(I_{11,72})$	11		
	29×11	$V(I_{11,48})$	3	$V(I_{11,73})$	3		
$V(I_{11,23})$	11	$V(I_{11,49})$	7	$V(I_{11,74})$	7		

Tabelle 3.5. Kodimension 11. Notation wie in Tabelle 3.3.

3.6.2. Verteilung der Punkte auf den Varietäten

Bei Kodimension 5 – 10 wurden jeweils 2000 Punkte ausgewertet. Da dies ein relativ geringer Stichprobenumfang ist, wurden noch einmal Versuche mit je 5000 Punkten angestellt, um die Verteilung der Punkte auf die verschiedenen Komponenten und die Vollständigkeit der Listen (in Bezug auf die Datenbank) näher zu untersuchen. Für diese Punkte wurden nur Lifts berechnet und keine Ideale. Um die Verteilung der ausgewerteten Punkte auf den Varietäten zu veranschaulichen, sind in Abbildung 3.6 die Verteilungen für Kodimension 9 bis 11 dargestellt. Für Kodimension 5 bis 8 gibt es zu wenige Komponenten, um aussagekräftige Diagramme zu erhalten, deshalb sind hier alle absoluten Werte angegeben.

Komponente	Punkte
$V_{5,1}$	5000
$V_{6,1}$	2635
$V_{6,2}$	2365
$V_{7,1}$	1168
$V_{7,2}$	1239
$V_{7,3}$	1288
$V_{7,4}$	1305
$V_{8,1}$	1273
$V_{8,2}$	1207
$V_{8,3}$	1306
$V_{8,4}$	1214

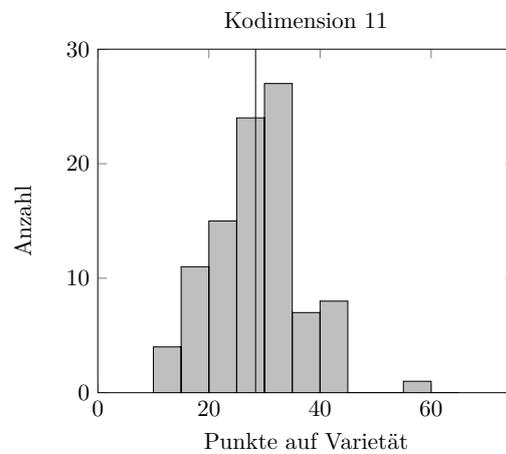
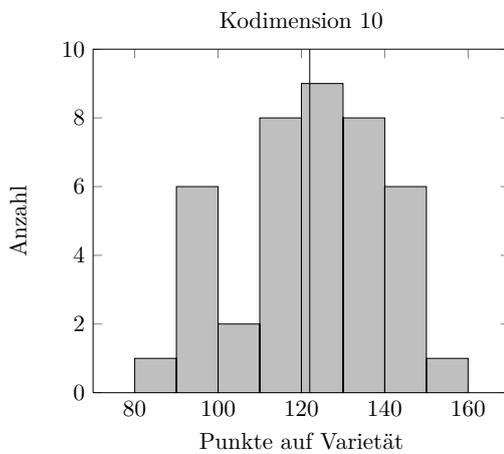
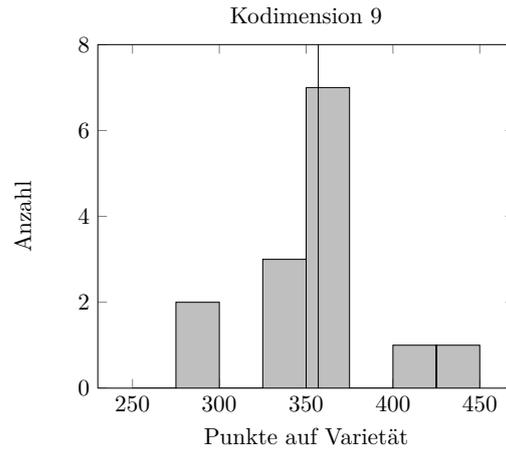


Tabelle 3.6. Verteilung der Punkte (in der Stichprobe) auf den einzelnen Komponenten. Die Markierung in den Diagrammen kennzeichnet jeweils die mittlere Zahl enthaltener Punkte.

Test auf Gleichverteilung

Eine naheliegende Vermutung ist, dass die Punkte derselben Kodimension gleichverteilt auf die einzelnen Komponenten sind. Um dies zu testen, wurde der χ^2 -Test verwendet. Die Prüfgröße ist dabei

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(k_j - n/m)^2}{n/m},$$

wobei m die Anzahl der Komponenten der entsprechenden Kodimension, k_j die Anzahl der Punkte auf der j -ten Komponente und n die Anzahl der ausgewerteten Punkte ist. Die zu benutzenden Quantile sind die der χ^2 -Verteilung mit $m - 1$ Freiheitsgraden. Kodimension 5 kann außer Acht gelassen werden, da alle Punkte auf einer Komponente liegen.

Kodimension	χ^2 für 2000 Punkte	χ^2 für 5000 Punkte	$\chi_{0,95;m-1}^2$
6	8,7	14,6	3,84
7	10,4	9	7,82
8	4,5	5,4	7,82
9	20,24	48,9	22,36
10	60,7	98,5	55,76
Kodimension	χ^2 für 2754 Punkte		$\chi_{0,95;m-1}^2$
11	214,5		119,87
11	194,1 (korrigiert)		121

Tabelle 3.7. Bei den Experimenten erhaltene Testgrößen und χ^2 -Quantile. Da $V_{11,54}$ mit 55 fast doppelt so viele Punkte wie das arithmetische Mittel enthält, wurde χ^2 noch ein zweites Mal berechnet, wobei angenommen wurde, dass es sich bei $V_{11,54}$ um zwei gleich große Komponenten handelt.

Die These der Gleichverteilung muss also für unsere Stichprobenmenge für die Kodimensionen 6, 7, 9, 10 und 11 verworfen werden. Dies könnte ein Indiz dafür sein, dass die Aufteilung noch nicht vollständig ist.

3.6.3. Fazit

Die Tabellen 3.3–3.5 zeigen, dass bei vielen berechneten Komponenten bereits die Kodimensionen mit denen der Punkte auf X_{13} übereinstimmen. Dies lässt vermuten, dass in diesen Fällen die $V(I_{c,j})$ mit den tatsächlichen Komponenten zumindest lokal identisch sind. In den übrigen Fällen ist stets die Kodimension der $V(I_{c,j})$ kleiner als die der Punkte auf X_{13} . Dies zeigt, dass vermutlich Polynome noch höheren Grades benötigt würden und hier die Darstellung in (1.2) als $V(I_{c,j}) \cup X_{13}$ zum Tragen kommt. Obwohl die These der Gleichverteilung verworfen werden musste, nehmen wir an, dass es sich bei $V(I_{11,54})$ um zwei Komponenten handelt und stellen als abschließendes Ergebnis folgende Vermutung an:

Vermutung 3.17. X_{13} hat

- 1 Komponente mit Kodimension 5
- 2 Komponenten mit Kodimension 6
- 4 Komponenten mit Kodimension 7
- 4 Komponenten mit Kodimension 8
- 14 Komponenten mit Kodimension 9
- 41 Komponenten mit Kodimension 10
- 98 Komponenten mit Kodimension 11

Bemerkung 3.18. Die Vermutung stimmt mit der in [vBK10a] für die Kodimensionen 5–8 genau überein. Für Kodimension 9, 10 und 11 wurden dort mindestens 12, mindestens 33 und mindestens 74 Komponenten vermutet.

4. Integralkurven und Kofaktoren

4.1. Erstes Integral

Definition 4.1. Eine Differentialform $\omega = Pdx + Qdy$ heißt integrierbar auf einer offenen Menge U , falls es eine nichtkonstante, differenzierbare Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, die konstant auf allen Integralkurven von ω in U ist. F heißt dann *erstes Integral* beziehungsweise *Bewegungskonstante* von ω .

Notation 4.2. Für eine Funktion F schreiben wir F_{x_i} anstelle von $\frac{\partial F}{\partial x_i}$.

Satz 4.3. Für eine Differentialform $\omega = Pdx + Qdy \neq 0$ und eine nichtkonstante, differenzierbare Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. F ist auf U erstes Integral von ω ,
2. $PF_y - QF_x = 0$,
3. $dF = \mu\omega$ für eine nichtkonstante stetig differenzierbare Funktion $\mu: U \rightarrow \mathbb{C}^2$.
 μ heißt in diesem Fall integrierender Faktor.

Beweis.

1. \Rightarrow 2. Sei $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ eine Lösungskurve des Ausgangssystems

$$\begin{aligned}x' &= Q(x, y) \\ y' &= -P(x, y)\end{aligned}$$

Also $\varphi'_1 = Q(\varphi)$ und $\varphi'_2 = -P(\varphi)$ und damit

$$\begin{aligned}(F \circ \varphi)' &= F_x(\varphi)\varphi'_1 + F_y(\varphi)\varphi'_2 \\ &= F_x(\varphi)Q(\varphi) - F_y(\varphi)P(\varphi).\end{aligned}$$

Ist F nun erstes Integral von ω , so gilt für alle Integralkurven φ :

$$0 = (F \circ \varphi)'(t) = F_x(\varphi(t))Q(\varphi(t)) - F_y(\varphi(t))P(\varphi(t)),$$

also ist $PF_y - QF_x = 0$ auf der Menge $\{(x, y) | \exists \text{ Integralkurve durch } (x, y)\}$.
Alle übrigen Punkte sind kritische Stellen, also gilt hier $P = Q = 0$ und damit auch $PF_y - QF_x = 0$.

2. \Rightarrow 1. Ist umgekehrt $PF_y - QF_x = 0$ und φ eine Integralkurve, so gilt

$$0 = F_x(\varphi)Q(\varphi) - F_y(\varphi)P(\varphi) = (F \circ \varphi)'.$$

Also ist F längs φ konstant und somit erstes Integral.

2. \Leftrightarrow 3.

$$\begin{aligned} PF_y - QF_x = 0 &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} F_x & P \\ F_y & Q \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow F_x dx + F_y dy = \mu P dx + \mu Q dy \\ &\Leftrightarrow dF = \mu \omega \end{aligned}$$

4.2. Kofaktoren

Notation 4.4. Im Folgenden betrachten wir Integralkurven nicht mehr als Abbildung $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, sondern als $C_F := V(F)$ für ein Polynom F .

Bemerkung 4.5. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. C_F ist Integralkurve von $Pdx + Qdy$,
2. $PF_y - QF_x = 0$ auf C_F ,
3. Es existiert ein Polynom K_F , so dass $PF_y - QF_x = -FK_F$ gilt.

Definition 4.6. K_F aus Bemerkung 4.5 heißt der *Kofaktor* von F .

Beispiel 4.7. Sei

$$\begin{aligned} P &= x + 6x^2 - xy + 10y^2 - 12x^3 + 12x^2y + 14xy^2 + 8y^3, \\ Q &= y + 10x^2 - 4xy + 11y^2 - 7x^3 + 5xy^2 - 7y^3. \end{aligned}$$

Das Programm *IntegralCurvesInC* liefert über \mathbb{F}_{29} als Integralkurve und Kofaktor (unter anderem)

$$\begin{aligned} F &= -3x + y + 4 \\ K_F &= 7x - 8y - 11x^2 + 10xy + 13y^2. \end{aligned}$$

Tatsächlich ist

$$PF_y - QF_x = x + 3y + 7x^2 - 13xy + 14y^2 - 4x^3 + 12x^2y - 13y^3 = -FK_F.$$

4.3. Darboux- und rational reversible Zentren

Lemma 4.8. Seien $\omega = Pdx + Qdy$ und F_1, \dots, F_n Integralkurven mit zugehörigen Kofaktoren K_{F_1}, \dots, K_{F_n} . Dann gilt:

$$P \left(\prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} \right)_y - Q \left(\prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} \right)_x = - \prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} \sum_{j=1}^n \alpha_j K_{F_j}. \quad (4.1)$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion: Sei zunächst F Integralkurve von $Pdx + Qdy$ mit Kofaktor K_F . Dann gilt:

$$\begin{aligned} P(F^\alpha)_y - Q(F^\alpha)_x &= P(\alpha F^{\alpha-1} F_y) - Q(\alpha F^{\alpha-1} F_x) \\ &= \alpha F^{\alpha-1} (P F_y - Q F_x) \\ &= -F^\alpha \alpha K_F. \end{aligned}$$

Sei nun $n \geq 1$ und (4.1) für $k \leq n$ bereits gezeigt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &P \left(\prod_{i=1}^{n+1} F_i^{\alpha_i} \right)_y - Q \left(\prod_{i=1}^{n+1} F_i^{\alpha_i} \right)_x = \\ &= P \left(\left(\prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} \right) F_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \right)_y - Q \left(\left(\prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} \right) F_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \right)_x \\ &= P \left(\left(\prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} \right)_y F_{n+1}^{\alpha_{n+1}} + \prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} (F_{n+1}^{\alpha_{n+1}})_y \right) - \\ &\quad Q \left(\left(\prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} \right)_x F_{n+1}^{\alpha_{n+1}} + \prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} (F_{n+1}^{\alpha_{n+1}})_x \right) \\ &= F_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \left(P \left(\prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} \right)_y - Q \left(\prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} \right)_x \right) + \\ &\quad \prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} \left(P_{\alpha_{n+1}} F_{n+1}^{\alpha_{n+1}-1} (F_{n+1})_y - Q_{\alpha_{n+1}} F_{n+1}^{\alpha_{n+1}-1} (F_{n+1})_x \right) \\ &= -F_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} \sum_{j=1}^n \alpha_j K_{F_j} + \\ &\quad \prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} \alpha_{n+1} F_{n+1}^{\alpha_{n+1}-1} \left(P (F_{n+1})_y - Q (F_{n+1})_x \right) \\ &= - \prod_{i=1}^{n+1} F_i^{\alpha_i} \sum_{j=1}^n \alpha_j K_{F_j} - \prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} \alpha_{n+1} F_{n+1}^{\alpha_{n+1}-1} (F_{n+1} K_{F_{n+1}}) \\ &= - \prod_{i=1}^{n+1} F_i^{\alpha_i} \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j K_{F_j} \end{aligned}$$

□

Satz 4.9. Sei $\omega = Pdx + Qdy$ und F_1, \dots, F_n Integralkurven von ω und K_{F_1}, \dots, K_{F_n} die zugehörigen Kofaktoren. Existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, so dass

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i K_{F_i} = 0,$$

so gilt: $\prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i}$ ist ein erstes Integral zu ω .

Beweis. Einsetzen in Lemma 4.8 liefert

$$P \left(\prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} \right)_y - Q \left(\prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i} \right)_x = 0.$$

Mit Satz 4.3 folgt die Behauptung. \square

Satz 4.10. Sei $\omega = Pdx + Qdy$ und F_1, \dots, F_n algebraische Integralkurven von ω und K_{F_1}, \dots, K_{F_n} die zugehörigen Kofaktoren. Existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, so dass

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i K_{F_i} = Q_x - P_y, \quad (4.2)$$

so gilt $\mu := \prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i}$ ist ein integrierender Faktor zu ω .

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $d(\mu\omega) = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} d(\mu\omega) &= d\mu \wedge \omega + \mu d\omega \\ &= (\mu_x dx + \mu_y dy) \wedge (Pdx + Qdy) + \mu(Q_x - P_y) dx \wedge dy \\ &= \underbrace{(\mu_x Q - \mu_y P)}_{\text{Lemma 4.8}} + \underbrace{\mu(Q_x - P_y)}_{\text{Voraussetzung}} dx \wedge dy \\ &= \left(\mu \sum_{i=1}^n \alpha_i K_{F_i} - \mu \sum_{i=1}^n \alpha_i K_{F_i} \right) dx \wedge dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Sequenz

$$\Omega^2 \xleftarrow{d} \Omega^1 \xleftarrow{d} \Omega^0,$$

wobei Ω^i der Raum der glatten i -Formen auf K^2 sein soll. Diese Sequenz ist nach dem *Poincaré-Lemma* exakt. Für eine Differentialform $\eta \in \Omega^1$ gilt also

$$d\eta = 0 \Leftrightarrow \exists F \in \Omega^0 \text{ mit } dF = \eta.$$

Also existiert eine Funktion $F \in \Omega^0$ mit $dF = \mu\omega$ und somit ist μ integrierender Faktor. \square

Definition 4.11. Differentialformen mit den Eigenschaften aus Satz 4.9 und 4.10 heißen *Darboux-integrierbar*.

In Abschnitt 4.4 wollen wir mit Hilfe von Kofaktoren versuchen, Darboux-Zentren auf den einzelnen Komponenten zu identifizieren.

Definition 4.12. Eine Differentialform $Pdx + Qdy$ heißt *rational reversibel*, wenn es eine rationale Abbildung

$$\Phi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

und eine Differentialform $P'dx + Q'dy$ gibt, so dass

$$\Phi^*(P'dx + Q'dy) = \mu(Pdx + Qdy)$$

für ein Polynom μ gilt.

Die Idee dabei ist, mit rationalen Abbildungen neue Zentren aus bereits bekannten zu konstruieren. Im Gegensatz zu Darboux-Zentren haben wir jedoch keine einfache Möglichkeit, rational reversible Zentren zu identifizieren. Deshalb wollen wir an dieser Stelle nicht weiter darauf eingehen. Wir werden aber in Kapitel 5 versuchen, bereits bekannte rational reversible Zentren den Komponenten $V_{5,1}$ – $V_{11,97}$ zuzuordnen.

4.4. Berechnung von Integralkurven und Kofaktoren

In diesem Kapitel wollen wir die einzelnen Komponenten genauer untersuchen, indem wir algebraische Integralkurven beziehungsweise Kofaktoren zu den Differentialformen berechnen und überprüfen, ob die Kofaktoren linear abhängig sind. Die Berechnung der Kofaktoren und Integralkurven erfolgte mit Hilfe des Programms *IntegralCurvesInc* aus [vBK10c]. Das Programm wurde mit folgendem Code aufgerufen:

```
IntegralKurven = (d, dR, dF) -> (  
  progame := "IntegralCurvesInc";  
  params :=  
    " --char "|toString(char dR)|  
    " -d "|toString(d)|  
    " --oneForm \"\"|toString(dF)|\"\"";  
  integralCurves := openInOut("!"|progame|" "|params)<<closeOut;  
  return get integralCurves;  
)
```

Der Ergebnisstring, der von dem Programm zurückgegeben wird, wurde mit Funktionen von Jakob Kröker interpretiert, die in den Quelltexten unter [Ste11] zu finden sind und hier nicht weiter behandelt werden sollen. Damit war es möglich, Integralkurven bis zum Grad 5 zu berechnen, in Einzelfällen auch bis zum Grad 6. Die entsprechenden Kofaktoren wurden dann auf lineare Abhängigkeit hin untersucht:

```
KFLinAbh = (d,dR,dF) -> (  
  Fp:=coefficientRing dR;  
  IK:=IntegralKurven(d,dR,dF);  
  if IK=={} then return "noDar";  
  --zu einigen Differentialformen konnten  
  --keine alg. Integralkurven berechnet werden  
  M:=matrix{ apply(flatten IK,ik -> (sub(ik#1,dR) ) ) };  
  --IK hat format {(Kurve,Kofaktor),...}  
  Coeffs:=last coefficients(M,Monomials => (  
    (matrix{{1,y,x,x^2,x*y,y^2}}*dx*dy))  
  );  
  --ueberpruefe, ob ein Darboux-Zentrum vorliegt:  
  if numColumns Coeffs > rank Coeffs then return "DarIntegral";  
  --falls nein nehme Differential der Differentialform hinzu,  
  D:=differentialD(dF);  
  Dcoeffs:=coefficients(D,Monomials => (  
    (matrix{{1,y,x,x^2,x*y,y^2}}*dx*dy))  
  );  
  if numColumns Coeffs >= rank (Coeffs|DCoeffs) then (  
    return "DarIntFaktor";
```

```

    );
--falls keins von beiden
return "noDar";
);

```

Die Ergebnisse sind in den Tabellen 4.1 – 4.3 zusammengefasst. Für Differentialformen der Kodimension 5 konnten keine Integralkurven berechnet werden, da der Rechenaufwand zu groß war. Dies liegt vermutlich daran, dass es in Kodimension 5 für jede Differentialform sehr viele Integralkurven gibt.

Komp.	D.I.	D.I.F.	k.D.
$V_{6,1}$	85%	15%	
$V_{6,2}$		0%	100%

Komp.	D.I.	D.I.F.	k.D.
$V_{7,1}$		1%	99%
$V_{7,2}$	41%	9%	50%
$V_{7,3}$	4%	2%	94%
$V_{7,4}$	38%	15%	47%

Komp.	D.I.	D.I.F.	k.D.
$V_{8,1}$	100%		
$V_{8,2}$	3%	5%	92%
$V_{8,3}$	4%	8%	88%
$V_{8,4}$	12%	30%	58%

Komp.	D.I.	D.I.F.	k.D.
$V_{9,1}$		13%	87%
$V_{9,2}$	100%		
$V_{9,3}$	16%	34%	49%
$V_{9,4}$	83%	17%	
$V_{9,5}$	83%	17%	
$V_{9,6}$	31%	13%	56%
$V_{9,7}$	7%	14%	79%
$V_{9,8}$	100%		
$V_{9,9}$	4%	7%	88%
$V_{9,10}$	100%		
$V_{9,11}$	7%	12%	81%
$V_{9,12}$	8%	3%	89%
$V_{9,13}$	16%	27%	57%
$V_{9,14}$	100%		

Tabelle 4.1. Kodimension 6–9. *D.I.* steht für *Darboux-Integral*, *D.I.F.* für *Darboux-integrierender Faktor* und *k.D.* für *kein Darboux*. Die jeweils größten Anteile sind markiert.

Komp.	D.I.	D.I.F.	k.D.	Komp.	D.I.	D.I.F.	k.D.	Komp.	D.I.	D.I.F.	k.D.
V _{10,1}	53%		47%	V _{10,15}	13%	9%	77%	V _{10,29}	5%	12%	83%
V _{10,2}			100%	V _{10,16}		54%	46%	V _{10,30}			100%
V _{10,3}	92%	8%		V _{10,17}	10%	13%	77%	V _{10,31}		25%	75%
V _{10,4}	13%	53%	35%	V _{10,18}	100%			V _{10,32}	12%	22%	66%
V _{10,5}			100%	V _{10,19}	87%	13%		V _{10,33}	11%	89%	
V _{10,6}	33%	13%	55%	V _{10,20}	33%		67%	V _{10,34}	90%	10%	
V _{10,7}		100%		V _{10,21}	35%	9%	56%	V _{10,35}	2%	98%	
V _{10,8}	4%	22%	74%	V _{10,22}		100%		V _{10,36}	24%	76%	
V _{10,9}	8%	2%	90%	V _{10,23}	100%			V _{10,37}	7%	63%	29%
V _{10,10}	44%	9%	47%	V _{10,24}	6%	23%	71%	V _{10,38}	17%	33%	50%
V _{10,11}	17%	13%	71%	V _{10,25}		100%		V _{10,39}	100%		
V _{10,12}		5%	95%	V _{10,26}		47%	53%	V _{10,40}	12%	50%	38%
V _{10,13}	13%	50%	37%	V _{10,27}		100%		V _{10,41}	5%	13%	83%
V _{10,14}	40%	5%	55%	V _{10,28}		13%	88%				

Tabelle 4.2. Kodimension 10.

Komp.	D.I.	D.I.F.	k.D.	Komp.	D.I.	D.I.F.	k.D.	Komp.	D.I.	D.I.F.	k.D.
V _{11,1}	100%			V _{11,34}			100%	V _{11,67}		100%	
V _{11,2}	100%			V _{11,35}	100%			V _{11,68}	100%		
V _{11,3}	100%			V _{11,36}		100%		V _{11,69}		100%	
V _{11,4}		16%	84%	V _{11,37}			100%	V _{11,70}		100%	
V _{11,5}		3%	97%	V _{11,38}		10%	90%	V _{11,71}			100%
V _{11,6}	100%			V _{11,39}	100%			V _{11,72}		100%	
V _{11,7}		100%		V _{11,40}			100%	V _{11,73}			100%
V _{11,8}		100%		V _{11,41}			100%	V _{11,74}			100%
V _{11,9}		100%		V _{11,42}	100%			V _{11,75}	100%		
V _{11,10}		100%		V _{11,43}			100%	V _{11,76}			100%
V _{11,11}		100%		V _{11,44}		21%	79%	V _{11,77}		100%	
V _{11,12}	100%			V _{11,45}			100%	V _{11,78}		100%	
V _{11,13}		100%		V _{11,46}		100%		V _{11,79}		100%	
V _{11,14}		100%		V _{11,47}	100%			V _{11,80}			100%
V _{11,15}		100%		V _{11,48}			100%	V _{11,81}			100%
V _{11,16}		100%		V _{11,49}		100%		V _{11,82}		100%	
V _{11,17}			100%	V _{11,50}	100%			V _{11,83}	100%		
V _{11,18}	100%			V _{11,51}		2%	98%	V _{11,84}			100%
V _{11,19}			100%	V _{11,52}		100%		V _{11,85}			100%
V _{11,20}	100%			V _{11,53}		100%		V _{11,86}		100%	
V _{11,21}			100%	V _{11,54}		100%		V _{11,87}		100%	
V _{11,22}			100%	V _{11,55}			100%	V _{11,88}			100%
V _{11,23}	100%			V _{11,56}			100%	V _{11,89}	100%		
V _{11,24}	100%			V _{11,57}			100%	V _{11,90}			100%
V _{11,25}	100%			V _{11,58}	100%			V _{11,91}		100%	
V _{11,26}	100%			V _{11,59}	100%			V _{11,92}			100%
V _{11,27}	100%			V _{11,60}			100%	V _{11,93}			100%
V _{11,28}		100%		V _{11,61}			100%	V _{11,94}			100%
V _{11,29}			100%	V _{11,62}		100%		V _{11,95}			100%
V _{11,30}			100%	V _{11,63}			100%	V _{11,96}		100%	
V _{11,31}	100%			V _{11,64}	100%			V _{11,97}		100%	
V _{11,32}		100%		V _{11,65}			100%				
V _{11,33}			100%	V _{11,66}	100%						

Tabelle 4.3. Kodimension 11.

4.4.1. Fazit

Besonders bei Kodimension 11 ist gut zu erkennen, dass in den meisten Fällen die Differentialformen auf einer Komponente in dieselbe Kategorie fallen. Hier fallen bei 92 von 97 Komponenten jeweils alle Differentialformen in dieselbe Kategorie, bei 58 sind sogar die Anzahl und Grade der jeweils gefundenen Integralkurven identisch (siehe Anhang B.1). Bei den übrigen Kodimensionen fällt das Ergebnis nicht so deutlich aus. Da nur Integralkurven bis zum Grad 6 berechnet wurden, ist es jedoch möglich, dass noch mehr Differentialformen Darboux-integrierbar sind als hier aufgelistet.

5. Żołądeks Listen

In [Żo194] hat Żołądek eine (nicht notwendigerweise vollständige) Unterteilung der Zentren in Familien vorgestellt und in [Żo196] einige Fehler korrigiert. Dabei wird zwischen Darboux-Zentren ($CD_1 - CD_{35}$) und rational reversiblen Zentren ($CR_1 - CR_{17}$) unterschieden.

Bemerkung 5.1. Einige weitere Fehler sind in [vB05], [Rhe08] und [vBK10a] aufgeführt.

Beispiel 5.2. Die Familie CD_1 ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} P &= a\alpha(x^2y + xy^2 - xy) + b\alpha(xy^2 + y^3 - y^2) + a\gamma x^2y + \\ &\quad b\gamma xy^2 + a(x^2y + xy^2 - xy) + \alpha(xy + y^2 - y) + \gamma xy \\ Q &= a\beta(x^3 + x^2y - x^2) + b\beta(x^2y + xy^2 - xy) + a\gamma x^2y + \\ &\quad b\gamma xy^2 + b(x^2y + xy^2 - xy) + \beta(x^2 + xy - x) + \gamma xy. \end{aligned}$$

Beispiel 5.3. Die Familie CR_1 ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} P &= 2x(r + sx^2 + ty + qy^2) \\ Q &= k + lx^2 + my + ny^2 + px^2y + qy^3. \end{aligned}$$

Für eine vollständige Darstellung der Familien sei auf [Żo196] und [Rhe08] (mit Fehlerkorrektur) verwiesen. Eine Familie kann also als Abbildung

$$\phi: K^n \rightarrow \Omega^1$$

verstanden werden, wobei Ω^1 der Raum der Grad-3-Differentialformen $Pdx + Qdy$ sei. Man beachte, dass im Allgemeinen nicht $\text{Im } \phi \subset W^3$ gilt, da die Differentialformen zwar Zentren besitzen, diese jedoch nicht im Ursprung liegen müssen. Zu Poincaré-Differentialformen werden sie erst, wenn man sie mit einer affinen Transformation verknüpft.

Definition 5.4. Sei G die affin-lineare Gruppe. Für eine Abbildung $\phi: K^n \rightarrow \Omega^1$ definieren wir

$$\begin{aligned} \phi_G: G \times K^n &\rightarrow \Omega^1 \\ (g, a) &\mapsto g(\phi(a)). \end{aligned}$$

5.1. Verteilung der Familien auf den Komponenten von X_{13}

Für uns interessant sind also die Differentialformen in $\overline{\text{Im } \phi_G} \cap W^3$. Im Gegensatz zu $\overline{\text{Im } \phi}$ muss diese Varietät nicht mehr irreduzibel sein. Wir werden im Folgenden auch Beispiele sehen, bei denen dies (wahrscheinlich) der Fall ist. Eine naheliegende Vermutung ist, dass ein Zusammenhang zwischen den Komponenten der Zentrumsvarietät und den verschiedenen Familien vorliegt, also dass Differentialformen, die auf einer Komponente liegen, auch in der selben Familie (oder wenigen verschiedenen Familien) liegen und umgekehrt, dass sich die Differentialformen aus einer Familie auf einigen wenigen Komponenten konzentrieren.

In der Datenbank [vBK10b] sind bereits Differentialformen zu den meisten Familien vorhanden, die für die Experimente verwendet wurden. Es wurden alle Punkte (wieder jeweils mit einem Lift der Länge 10) in alle Ideale eingesetzt. Dabei wurde nicht nur zwischen den unterschiedlichen Familien, sondern auch zwischen den Kodimensionen der einzelnen Punkte unterschieden. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 5.1 und 5.2 aufgelistet. Die Tabellen B.7 und B.8 enthalten die absoluten Zahlen der enthaltenen Punkte. Außerdem sind in den Tabellen B.1 bis B.6 zusätzlich noch die Anteile der Darboux-integrierbaren Differentialformen aus Kapitel 4.4 aufgeführt.

Familie	Varietäten	Familie	Varietäten
CD_1 ($Rk7$)	$V(I_{7,3})(65\%)$ $V(I_{7,4})$	CD_{14} ($Rk7$)	$V(I_{7,2})$
CD_2 ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ $V(I_{7,4})$	CD_{15} ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ $V(I_{7,4})$
CD_2 ($Rk7$)	$V(I_{7,2})(7\%)$ $V(I_{7,4})(93\%)$	CD_{16} ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ $V(I_{7,4})$
CD_3 ($Rk5$)	$V(I_{5,1})$ $V(I_{6,1})$ $V(I_{7,2})$ $V(I_{7,4})$	CD_{19} ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ $V(I_{7,4})$
CD_3 ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ $V(I_{7,4})$	CD_{21} ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ $V(I_{7,4})$
CD_4 ($Rk5$)	$V(I_{5,1})$ $V(I_{6,1})$ $V(I_{7,2})$ $V(I_{7,4})$	CD_{21} ($Rk9$)	$V(I_{9,5})$
CD_4 ($Rk7$)	$V(I_{7,2})$	CD_{22} ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ $V(I_{7,4})$
CD_5 ($Rk5$)	$V(I_{5,1})$ $V(I_{6,1})$ $V(I_{7,2})$ $V(I_{7,4})$	CD_{23} ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ $V(I_{7,4})$
CD_7 ($Rk8$)	$V(I_{8,1})$	CD_{25} ($Rk7$)	$V(I_{7,4})$
CD_8 ($Rk9$)	$V(I_{9,2})$	CD_{25} ($Rk9$)	$V(I_{9,4})(53\%)$ $V(I_{9,7})(47\%)$
CD_{10} ($Rk10$)	$V(I_{10,7})$	CD_{25} ($Rk10$)	$V(I_{10,34})$
CD_{13} ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ $V(I_{7,4})$	CD_{27} ($Rk7$)	$V(I_{7,4})$
CD_{14} ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ $V(I_{7,4})$	CD_{27} ($Rk10$)	$V(I_{10,3})$
		CD_{28} ($Rk7$)	$V(I_{7,1})(94\%)$ $V(I_{7,4})(6\%)$
		CD_{28} ($Rk9$)	$V(I_{9,14})$
		CD_{30} ($Rk9$)	$V(I_{9,11})$
		CD_{31} ($Rk11$)	$V(I_{11,24})$
		CD_{35} ($Rk7$)	$V(I_{7,4})$
		CD_{35} ($Rk8$)	$V(I_{7,4})$ $V(I_{8,3})$

Tabelle 5.1. Darboux-Familien und die Varietäten, in denen die jeweiligen Familien enthalten sind. Wo nicht anders vermerkt, sind alle Punkte der Familie in der Varietät enthalten. Beachte, dass $V(I_{7,4})$ nicht der Komponente $V'_{7,4}$ entspricht. Zu nicht aufgeführten Familien/Kodimensionen waren keine Punkte in der Datenbank vorhanden.

Familie	Varietäten	Familie	Varietäten
CR_1 (Rk6)	$V(I_{6,1})(1\%)$	CR_9 (Rk9)	$V(I_{9,1})$
	$V(I_{6,2})(99\%)$	CR_{10} (Rk6)	$V(I_{6,1})$
	$V(I_{7,2})(99\%)$		$V(I_{7,4})$
	$V(I_{7,4})(1\%)$	CR_{10} (Rk9)	$V(I_{9,5})$
	$V(I_{8,2})(99\%)$	CR_{12} (Rk6)	$V(I_{6,1})$
	$V(I_{9,5})(99\%)$		$V(I_{7,4})$
	$V(I_{9,7})(99\%)$	CR_{12} (Rk7)	$V(I_{7,4})$
	$V(I_{9,11})(99\%)$		CR_{13} (Rk6)
$V(I_{10,12})(99\%)$	$V(I_{7,4})$		
CR_2 (Rk7)	$V(I_{7,2})(1\%)$	CR_{14} (Rk6)	$V(I_{6,1})$
	$V(I_{7,4})(99\%)$		$V(I_{7,4})$
CR_2 (Rk8)	$V(I_{7,4})$	CR_{14} (Rk7)	$V(I_{7,2})$
	$V(I_{8,4})$		CR_{14} (Rk8)
CR_4 (Rk7)	$V(I_{7,4})$	$V(I_{8,2})(99\%)$	
	$V(I_{7,4})$	$V(I_{10,12})(99\%)$	
CR_4 (Rk8)	$V(I_{7,4})$	CR_{14} (Rk9)	$V(I_{9,2})$
	$V(I_{8,3})$		CR_{15} (Rk6)
CR_5 (Rk7)	$V(I_{7,2})$	$V(I_{7,4})$	
CR_6 (Rk7)	$V(I_{7,4})$	CR_{15} (Rk8)	$V(I_{8,1})$
CR_6 (Rk8)	$V(I_{7,4})$		CR_{15} (Rk9)
	$V(I_{8,3})$	$V(I_{9,4})(94\%)$	
CR_7 (Rk7)	$V(I_{7,2})$	CR_{16} (Rk6)	$V(I_{6,1})$
CR_8 (Rk6)	$V(I_{6,1})$		$V(I_{7,4})$
	$V(I_{7,4})$	CR_{16} (Rk7)	$V(I_{7,2})(4\%)$
CR_9 (Rk6)	$V(I_{6,1})$		$V(I_{7,4})(96\%)$
	$V(I_{7,4})$		
CR_9 (Rk7)	$V(I_{7,2})$		

Tabelle 5.2. Rational reversible Familien.

5.1.1. Fazit

Dass in vielen Fällen die Punkte einer Familie auf mehreren Varietäten liegen, ist durch die in Kapitel 3.6 beschriebenen Überschneidungen zu erklären. Vergleicht man die Tabellen 5.1 und 5.2 mit Tabelle 3.2, so sieht man, dass in den Fällen, in denen einzelne Familien auf mehreren Varietäten liegen, diese Varietäten auch in Tabelle 3.2 in Verbindung stehen. Die Vermutung, dass die einzelnen Familien jeweils auf einer oder wenigen verschiedenen Komponenten liegen, hat sich also mit der Einschränkung bestätigt, dass man innerhalb der Familien zwischen den Punkten verschiedener Kodimensionen unterscheiden muss.

6. Parametrisierung der Komponenten mit Kodimension 11

6.1. Basiswechsel

Hat man eine Differentialform mit geschlossenen Integralkurven gefunden, so lassen sich daraus weitere solche Formen bilden, indem man einen Basiswechsel durchführt, bei dem die Gestalt $xdx + ydy + \text{Terme höheren Grades}$ (gegebenenfalls nach Abspalten einer Konstanten) beibehalten wird. Durch Nachrechnen sieht man leicht, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die Transformationsmatrix

$$AA^T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ und } \det A \neq 0. \quad (6.1)$$

Mit einer Differentialform erhält man also auch immer eine 2-dimensionale Familie weiterer Differentialformen mit geschlossenen Integralkurven.

Lemma 6.1. *Für einen Basiswechsel der Form (6.1) und eine Differentialform $\omega \in W^d$, $d \geq 2$ gilt:*

$$\omega \circ A = (\det A) xdx + (\det A) ydy + \text{Terme höheren Grades.}$$

Beweis. Einsetzen. □

Demnach ist $\omega \circ A$ im Allgemeinen keine Poincaré-Differentialform, weshalb wir die folgende Schreibweise einführen:

Notation 6.2. Für einen Basiswechsel A und eine Differentialform ω schreiben wir:

$$\omega_A = \frac{\omega \circ A}{\det A}.$$

Da die Differentialformen in einem 14-dimensionalen Vektorraum parametrisiert werden, haben die Komponenten von Kodimension 11 die Dimension 3.

Idee: Die Struktur der jeweils zweidimensionalen Familien, die durch Basiswechsel gewonnen werden, ist eindimensional.

Gesucht wird deshalb eine Abbildung $\Gamma : W^3 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_{29}}^2$, die invariant unter solchen Basiswechseln ist. Nun sollen die Bilder der Differentialformen eine eindimensionale Struktur haben. Um diese zu verstehen, wollen wir Kurven in $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_{29}}^2$ suchen, auf denen die Bilder der Differentialformen liegen, also Polynome F_1, F_2, \dots mit

$$\Gamma(V_{11}) \subset V(F_1) \cup V(F_2) \cup \dots,$$

wobei $V_{11} := \{\omega \in W^3 \mid \pi_3(\omega) \text{ hat Kodimension } 11\}$. Dafür wird wie in Kapitel 3 vorgegangen. Da wir in diesem Fall deutlich weniger Monome als beim Berechnen der Ideale haben, können wir Polynome deutlich höheren Grades berechnen. Für die Länge n der Lifts stellen wir Überlegungen analog zu denen in Kapitel 3 an:

In $K[x, y, z]$ gibt es $\binom{d+2}{2}$ Monome vom Grad d , man erhält also eine $(n+1) \times \binom{d+2}{2}$ -Koeffizientenmatrix und die Länge n der Lifts sollte demnach so gewählt werden, dass

$$n + 1 \geq \binom{d + 2}{2}$$

gilt.

Definition 6.3. Wir definieren $\Gamma = \gamma \circ \pi_2$ mit

$$\gamma: \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_{29}^6 & \rightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{F}_{29}}^2 \\ \begin{pmatrix} p_{2,0} \\ \vdots \\ q_{0,2} \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -p_{11}q_{20} + p_{20}q_{11} - p_{02}q_{11} + p_{11}q_{02} \\ p_{11}^2 - 4p_{20}p_{02} + q_{11}^2 - 4q_{20}q_{02} \\ -p_{20}^2 - 2p_{20}p_{02} - p_{02}^2 - q_{20}^2 - 2q_{20}q_{02} - q_{02}^2 \end{pmatrix} \end{array} \quad (6.2)$$

Bemerkung 6.4. Die Abbildung (6.2) stammt aus [vB10]

Satz 6.5. Γ ist invariant unter Basiswechseln der Form (6.1), das heißt

$$\Gamma(\omega) = \Gamma(\omega_A)$$

für $\omega \in W^d$ mit $d \geq 2$. (Wir fassen hier W^2 eingebettet in W^d auf.)

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\omega \circ A &= (a^2 + b^2) x dx \\
&+ (a^2 + b^2) y dy \\
&+ (p_{20}a^3 + p_{11}a^2b + q_{20}a^2b + p_{02}ab^2 + q_{11}ab^2 + q_{02}b^3) x^2 dx \\
&+ (p_{11}a^3 + 2p_{02}a^2b - 2p_{20}a^2b + q_{11}a^2b - p_{11}ab^2 + 2q_{02}ab^2 \\
&- 2q_{20}ab^2 - q_{11}b^3) xy dx \\
&+ (p_{02}a^3 - p_{11}a^2b + q_{02}a^2b + p_{20}ab^2 - q_{11}ab^2 + q_{20}b^3) y^2 dx \\
&+ (q_{20}a^3 - p_{20}a^2b + q_{11}a^2b - p_{11}ab^2 + q_{02}ab^2 - p_{02}b^3) x^2 dy \\
&+ (q_{11}a^3 - p_{11}a^2b + 2q_{02}a^2b - 2q_{20}a^2b - 2p_{02}ab^2 + 2p_{20}ab^2 \\
&- q_{11}ab^2 + p_{11}b^3) xy dy \\
&+ (q_{02}a^3 - p_{02}a^2b - q_{11}a^2b + p_{11}ab^2 + q_{20}ab^2 - p_{20}b^3) y^2 dy.
\end{aligned}$$

Setzt man $\omega_A = \frac{\omega \circ A}{\det A}$ in Γ ein, erhält man:

$$\Gamma(\omega_A) = \begin{pmatrix} (a^2 + b^2)(-p_{11}q_{02} + p_{02}q_{11} - p_{20}q_{11} + p_{11}q_{20}) \\ (a^2 + b^2)(p_{11}^2 - 4p_{02}p_{20} + q_{11}^2 - 4q_{02}q_{20}) \\ (a^2 + b^2)(-p_{02}^2 - 2p_{02}p_{20} - p_{20}^2 - q_{02}^2 - 2q_{02}q_{20} - q_{20}^2) \end{pmatrix},$$

also

$$\Gamma(\omega_A) = \Gamma(\omega) \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_{29}}^2.$$

□

In diese Abbildung setzt man nun einen Lift l einer Differentialform ein. Findet man ein Polynom, das an $\Gamma(l)$ verschwindet, so hat man eine Kurve in $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_{29}}^2$ gefunden, auf der möglicherweise noch mehr Bilder anderer Differentialformen liegen.

6.2. Ergebnisse

Zum Bestimmen der Polynome wurden Lifts der Länge $250 > \binom{22}{2} = 231$ verwendet, so dass theoretisch Polynome bis zum Grad 20 berechnet werden konnten. Bei den Berechnungen war Folgendes zu beobachten:

- Zu allen Punkten der Stichprobe (zum Zeitpunkt der Berechnungen alle Punkte in der Datenbank) lässt sich ein Polynom finden.
- Der Grad der Polynome liegt zwischen 3 und 11.
- Die Polynome zu Punkten, die auf einer Komponente liegen, sind identisch.

- Ein Polynom trat nie bei zwei oder mehr verschiedenen Komponenten auf. Die Grade der Kurven lassen sich deshalb gut in folgender Tabelle darstellen:

Komponente	Grad	Komponente	Grad	Komponente	Grad
$V_{11,1}$	5	$V_{11,34}$	5	$V_{11,67}$	8
$V_{11,2}$	4	$V_{11,35}$	5	$V_{11,68}$	5
$V_{11,3}$	5	$V_{11,36}$	5	$V_{11,69}$	3
$V_{11,4}$	5	$V_{11,37}$	7	$V_{11,70}$	6
$V_{11,5}$	9	$V_{11,38}$	9	$V_{11,71}$	8
$V_{11,6}$	6	$V_{11,39}$	3	$V_{11,72}$	5
$V_{11,7}$	7	$V_{11,40}$	4	$V_{11,73}$	7
$V_{11,8}$	4	$V_{11,41}$	5	$V_{11,74}$	7
$V_{11,9}$	6	$V_{11,42}$	6	$V_{11,75}$	9
$V_{11,10}$	4	$V_{11,43}$	7	$V_{11,76}$	10
$V_{11,11}$	8	$V_{11,44}$	5	$V_{11,77}$	7
$V_{11,12}$	5	$V_{11,45}$	5	$V_{11,78}$	8
$V_{11,13}$	6	$V_{11,46}$	7	$V_{11,79}$	7
$V_{11,14}$	8	$V_{11,47}$	6	$V_{11,80}$	9
$V_{11,15}$	3	$V_{11,48}$	8	$V_{11,81}$	9
$V_{11,16}$	6	$V_{11,49}$	6	$V_{11,82}$	8
$V_{11,17}$	5	$V_{11,50}$	3	$V_{11,83}$	9
$V_{11,18}$	6	$V_{11,51}$	5	$V_{11,84}$	11
$V_{11,19}$	8	$V_{11,52}$	7	$V_{11,85}$	9
$V_{11,20}$	6	$V_{11,53}$	5	$V_{11,86}$	8
$V_{11,21}$	6	$V_{11,54}$	6	$V_{11,87}$	7
$V_{11,22}$	3	$V_{11,55}$	5	$V_{11,88}$	8
$V_{11,23}$	5	$V_{11,56}$	4	$V_{11,89}$	9
$V_{11,24}$	4	$V_{11,57}$	7	$V_{11,90}$	7
$V_{11,25}$	6	$V_{11,58}$	4	$V_{11,91}$	8
$V_{11,26}$	7	$V_{11,59}$	6	$V_{11,92}$	8
$V_{11,27}$	6	$V_{11,60}$	4	$V_{11,93}$	8
$V_{11,28}$	6	$V_{11,61}$	5	$V_{11,94}$	8
$V_{11,29}$	5	$V_{11,62}$	5	$V_{11,95}$	9
$V_{11,30}$	7	$V_{11,63}$	7	$V_{11,96}$	7
$V_{11,31}$	7	$V_{11,64}$	3	$V_{11,97}$	7
$V_{11,32}$	6	$V_{11,65}$	7		
$V_{11,33}$	5	$V_{11,66}$	6		

Tabelle 6.1. Die Grade der invarianten Polynome zu den einzelnen Komponenten in Kodimension 11.

6.2.1. Fazit

Obwohl die Berechnung der Kurven in diesem Kapitel unabhängig von den in Kapitel 3 berechneten Komponenten stattfand, ist die resultierende Unterteilung dieselbe. Dies ist ein weiteres Indiz dafür, dass die Aufteilung vollständig ist. Man kann allerdings die Möglichkeit, dass es „ähnliche“ Komponenten gibt, die dasselbe Polynom erzeugen und nicht als verschiedene Komponenten erkannt wurden, nicht ausschließen. Ein Beispiel für diesen Fall könnte $V(I_{11,55})$ sein. Wir behalten deshalb die Vermutung 3.17 bei.

A. Frommers Algorithmus

Mit Hilfe des Algorithmus von Frommer lassen sich Strudelgrößen rekursiv berechnen. Mit dem Verfahren ist es möglich, die Strudelgrößen auch für eine Differentialform auszuwerten, ohne sie explizit zu berechnen. Die hier beschriebene Form wurde aus [vB05] übernommen.

$$c_{l,n-l} := \sum_{2 \leq i+j \leq n} (-(n-l-j+1)p_{ij}a_{l-i,n-l-j+1} + (l-i+1)q_{ij}a_{l-i+1,n-l-j})$$

$$a_{n-l,l} := \begin{cases} -\sum_{i=1}^{\frac{n-l}{2}} \frac{c_{2i-1,n-(2i-1)}}{n-l} \prod_{j=i}^{\frac{n-l-2}{2}} \frac{n-2j}{2j} & \text{für } l, n \text{ gerade, } l < n \\ 0 & \text{für } l = n \text{ gerade} \\ \frac{\alpha(\min(\frac{l-1}{2}, \frac{n-l-1}{2}), n)}{2 \min(l, n-l)} \left(\sum_{i=0}^{\frac{l-1}{2}} \frac{c_{n-2i,2i}}{\alpha(i, n)} - \sum_{j=\frac{l-1}{2}+1}^{\frac{n}{2}} \frac{c_{n-2j,2j}}{\alpha(j, n)} \right) & \text{für } l \text{ ungerade, } n \text{ gerade} \\ \sum_{i=0}^{\frac{l-1}{2}} \frac{c_{n-2i,2i}}{l} \prod_{j=i}^{\frac{l-3}{2}} \frac{n-2j-1}{2j+1} & \text{für } l, n \text{ ungerade} \\ -\sum_{i=0}^{\frac{n-l-1}{2}} \frac{c_{2i,n-2i}}{n-l} \prod_{j=i}^{\frac{n-l-3}{2}} \frac{n-2j-1}{2j+1} & \text{für } l \text{ gerade, } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

wobei

$$\alpha(i, n) := \prod_{k=1}^i \frac{n - (2k - 1)}{(2k - 1)}$$

und $a_{2,0} = a_{0,2} = 1$, $a_{0,0} = a_{0,1} = a_{1,0} = a_{1,1} = 0$ sowie $a_{i,j} = c_{i,j} = 0$ falls $i < 0$ oder $j < 0$.

Die k -te Strudelgröße lässt sich dann folgendermaßen darstellen:

$$s_k(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k+1} \frac{c_{2k+2-2i,2i}}{\alpha(i, 2k+2)}.$$

A.1. Der Algorithmus in Charakteristik p

In Charakteristik p lässt sich der Algorithmus nicht beliebig fortführen, da irgendwann in den Nennern Zahlen größer gleich p vorkommen. Für k mit $2k+2 \leq p$ ist s_k jedoch wohldefiniert, da in den Nennern von $C_{l,n-l}$, $a_{n-l,l}$ und s_k nur Produkte von Zahlen kleiner gleich $2k+2$ vorkommen.

B. Weitere Tabellen

B.1. Darboux-Zentren und ihre Integralkurven

Die folgenden Tabellen enthalten die Verteilung von Darboux-Zentren auf den einzelnen Komponenten zusammen mit den Graden der zugehörigen Integralkurven. Die bei den Graden angegebenen Prozente beziehen sich auf alle Differentialformen der jeweiligen Komponente.

Komp.	Darboux Integral		Darb. Integr. Faktor		kein Darboux	
	Anteil	Grade	Anteil	Grade	Anteil	Grade
$V_{6,1}$	85%	$(1, 3, 28 \times 5)(7\%)$ $(1, 1, 2, 28 \times 5)(1\%)$ $(1, 3)(74\%)$ $(1, 3, 28 \times 4)(3\%)$ $(1, 1, 2)(1\%)$ $(1, 29 \times 3)(1\%)$ $(29 \times 3)(1\%)$	15%	$(1)(12\%)$ $(3)(3\%)$		
$V_{6,2}$			1%	$(4, 4) (1\%)$	99%	$()(97\%)$ $(1, 1)(1\%)$ $(2)(3\%)$ $(4)(1\%)$

Tabelle B.1. Kodimension 6. Prozentzahlen von über 100% können durch Rundung zustande kommen. Ein Eintrag der Form „()“ bedeutet, dass keine Integralkurve berechnet werden konnte.

Komp.	Darboux Integral		Darb. Integr. Faktor		kein Darboux	
	Anteil	Grade	Anteil	Grade	Anteil	Grade
$V_{7,1}$			1%	(1, 2, 2)(1%) (1, 1, 4)(1%)	99%	(1)(89%) (1, 1)(3%) (1, 2)(6%) (1, 3)(1%) (1, 4)(1%)
$V_{7,2}$	41%	(1, 1, 2)(3%) (1, 1, 2, 28 × 4)(1%) (1, 2, 2, 3, 27 × 4)(1%) (1, 1, 28 × 2)(1%) (2, 2, 2, 2, 27 × 4)(1%) (2, 2)(34%) (2, 2, 28 × 4)(1%)	9%	(2) (9%)	50%	()(50%) (1)(1%)
$V_{7,3}$	4%	(1, 1, 1, 1)(3%) (1, 1, 1)(1%) (1, 1, 1, 28 × 5)(1%)	2%	(1, 1, 1) (2%)	94%	()(35%) (1)(39%) (1, 1)(20%)
$V'_{7,4}$	38%	(1, 1, 2, 28 × 5)(1%) (1, 2)(3%) (1, 1, 2, 28 × 4)(1%) (1, 1, 2)(32%) (1, 2, 28 × 3)(1%) (1, 1, 2, 28 × 3)(1%) (1, 1, 1, 1)(1%) (1, 2, 28 × 5)(1%)	15%	(1, 1)(10%) (1, 2)(6%)	47%	()(4%) (1)(1%) (1, 1)(1%) (2)(41%)

Tabelle B.2. Kodimension 7. Notation wie Tabelle B.1.

Komp.	Darboux Integral		Darb. Integr. Faktor		kein Darboux	
	Anteil	Grade	Anteil	Grade	Anteil	Grade
$V_{8,1}$	100%	(1, 2, 5, 6)(1%) (2, 5)(99%) (1, 2, 4)(1%)				
$V_{8,2}$	3%	(5, 5, 6)(1%) (1, 2, 3, 5)(1%) (3, 4, 5)(1%) (4, 4, 4)(1%) (3, 3, 3, 4)(1%) (3, 4, 6)(1%) (2, 3, 4, 5)(1%) (2, 3, 3, 5)(1%) (4, 5, 5)(1%) (4, 5, 6)(1%)	5%	(4, 4)(1%) (4, 5)(1%) (4, 6)(1%) (3, 3)(1%) (3, 4)(1%) (3, 5)(1%) (3, 6)(1%) (2, 4)(1%) (2, 6)(1%) (6, 6)(1%) (1, 4)(1%) (1, 5)(1%) (5, 6)(1%) (1, 2, 4)(1%)	92%	(1, 2)(1%) (1, 3)(1%) ()(62%) (1)(2%) (2)(4%) (3)(10%) (4)(6%) (5)(5%) (2, 3)(1%) (6)(2%)
$V_{8,3}$	4%	(1, 1, 1, 5)(1%) (1, 1, 1, 1, 4)(1%) (1, 1, 1, 6)(1%) (1, 1, 1, 3, 4, 27 × 6)(1%) (1, 1, 1, 5, 6)(1%) (1, 1, 1, 4, 5)(1%) (1, 1, 1, 4, 6)(1%) (1, 1, 1, 3)(1%)	8%	(1, 1, 6)(1%) (1, 1, 1)(7%) (1, 1, 1, 1)(1%) (1, 1, 3)(1%) (1, 1, 4)(1%)	88%	(1, 1)(7%) (1, 1, 1)(1%) (1, 3)(1%) (1, 4)(2%) (1, 1, 3)(1%) (1, 5)(1%) (1, 6)(2%) ()(32%) (1)(41%)
$V_{8,4}$	12%	(1, 1, 1, 2, 4, 27 × 5)(1%) (1, 1, 1, 1, 3, 5, 6)(1%) (1, 1, 1, 3, 5)(1%) (1, 1, 1, 3, 4, 27 × 6)(1%) (1, 1, 1, 3, 6)(1%) (1, 1, 1, 2, 6)(1%) (1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 26 × 6)(1%) (1, 1, 1, 2, 5, 27 × 6)(1%) (1, 1, 1, 2)(1%) (1, 1, 1, 3)(1%) (1, 1, 1, 4)(1%) (1, 1, 1, 5)(2%) (1, 1, 1, 1, 4)(1%) (1, 1, 1, 6)(3%) (1, 1, 1, 5, 6)(1%) (1, 1, 1, 4, 4)(1%) (1, 1, 1, 4, 5)(1%) (1, 1, 1, 4, 6)(1%)	30%	(1, 1, 6)(1%) (1, 1, 1)(28%) (1, 1, 1, 1)(2%) (1, 1, 3)(1%)	58%	(1, 1)(9%) (1, 1, 1)(1%) (1, 2)(1%) (1, 3)(2%) (1, 4)(1%) (1, 5)(2%) (1, 1, 4)(1%) (1, 6)(1%) (1, 1, 6)(1%) (1)(40%)

Tabelle B.3. Kodimension 8. Notation wie Tabelle B.1.

Komp.	Darboux Integral		Darb. Integr. Faktor		kein Darboux	
	Anteil	Grade	Anteil	Grade	Anteil	Grade
$V_{9,1}$			13%	(1,3)(2%) (1,4)(7%) (1,5)(4%)	87%	(1) (87%)
$V_{9,2}$	100%	(3,4)(94%) (1,2,4)(6%)				
$V_{9,3}$	16%	(1,1,2,6,6)(1%) (1,2,3,5,6)(1%) (1,2,3,5)(1%) (1,2,3,6)(3%) (1,2,2,4,5)(1%) (1,2,5,6)(1%) (1,2,3,4,5)(1%) (1,2,3,4,6)(1%) (1,2,4,4)(3%) (1,2,4,6)(1%) (1,1,2,2,4,4)(1%) (1,2,6,6)(2%)	34%	(1,2,5)(1%) (1,2,6)(5%) (1,1,2,2)(1%) (1,1,2,3)(1%) (1,1,2,6)(1%) (1,2,2)(3%) (1,2,3)(14%) (1,2,4)(9%)	49%	(1)(5%) (1,1)(2%) (1,2)(40%) (1,3)(1%) (1,4)(1%)
$V_{9,4}$	83%	(1,2,4,5)(14%) (1,2,3,4,27×6)(2%) (1,2,4)(67%)	17%	(1,4)(7%) (1,2)(10%)		
$V_{9,5}$	83%	(1,1,2,4,4)(1%) (1,2,3,4,27×6)(3%) (1,2,4,5)(15%) (1,2,4)(65%)	17%	(1,4)(6%) (1,2)(11%)		
$V_{9,6}$	31%	(1,1,1,1,2,5)(3%) (1,1,1,1,1,5)(1%) (1,1,1,1,2,6)(1%) (1,1,1,1,2)(26%) (1,1,1,1,1,1)(1%)	13%	(1,1,1,1)(7%) (1,1,1,2)(5%) (1,1,1,1,1)(1%)	56%	(1,1,1)(1%) (1,2)(3%) (1,1,1,1)(3%) (1,1,2)(50%)
$V_{9,7}$	7%	(1,4,5,6)(4%) (1,1,2,4,5)(1%) (1,1,3,3,5)(1%) (1,3,4,5)(2%)	14%	(1,4)(4%) (1,5)(8%) (1,6)(3%)	79%	(1) (79%)
$V_{9,8}$	100%	(1,2,3,4,27×6)(93%) (1,1,2,2,4,27×6)(7%)				
$V_{9,9}$	4%	(1,1,1,2,5,6)(3%) (1,1,1,2,4,5)(1%) (1,1,1,2,6)(1%)	7%	(1,1,1,2)(7%)	88%	(2)(35%) (1,2)(54%)
$V_{9,10}$	100%	(2,3,4,27×6)(91%) (1,2,2,4,27×6)(9%)				
$V_{9,11}$	7%	(1,4,5,6)(3%) (1,1,3,5,6)(1%) (1,3,4,5)(3%)	12%	(1,4)(1%) (1,5)(5%) (1,1,4)(1%) (1,6)(6%)	81%	(1) (81%)

Tabelle B.4. Kodimension 9. Notation wie Tabelle B.1, Fortsetzung auf nächster Seite.

Komp.	Darboux Integral		Darb. Integr. Faktor		kein Darboux	
	Anteil	Grade	Anteil	Grade	Anteil	Grade
$V_{9,12}$	8%	(1, 1, 1, 1, 2)(7%) (1, 1, 1, 1, 1, 1)(1%)	3%	(1, 1, 1, 1)(2%) (1, 1, 1, 1, 1)(1%)	89%	()(2%) (1, 1)(1%) (2)(63%) (1, 2)(2%) (1, 1, 2)(18%) (1, 1, 1, 1)(3%)
$V_{9,13}$	16%	(1, 1, 1, 1, 4)(1%) (1, 1, 2, 3, 4)(1%) (1, 1, 2, 3, 6)(1%) (1, 1, 2, 5, 5)(1%) (1, 1, 2, 3)(3%) (1, 1, 1, 1, 6, 6)(1%) (1, 1, 2, 4)(4%) (1, 1, 2, 5)(2%) (1, 1, 2, 6)(2%) (1, 1, 2, 4, 5)(1%)	27%	(1, 1, 2)(21%) (1, 1, 1, 1)(4%) (1, 2, 6)(2%)	57%	(1, 1)(5%) (2)(39%) (1, 2)(6%) (2, 3)(2%) (2, 4)(2%) (2, 5)(2%)
$V_{9,14}$	100%	(1, 2, 2, 3, 27 × 4)(79%) (1, 1, 2, 2, 3, 3, 26 × 4)(9%) (1, 1, 2, 2, 2, 27 × 4)(12%)				

Fortsetzung von Tabelle B.4.

Komp.	Darboux Integral		Darb. Integr. Faktor		kein Darboux	
	Anteil	Grade	Anteil	Grade	Anteil	Grade
$V_{10,1}$	53%	(1, 1, 1, 2, 3)(2%) (1, 1, 3, 3)(45%) (1, 1, 1, 2, 3, 5)(2%) (1, 1, 3, 3, 5)(4%)			47%	(1, 1) (47%)
$V_{10,2}$					100%	() (100%)
$V_{10,3}$	92%	(1, 1, 1, 2, 3)(7%) (1, 1, 2, 4)(63%) (1, 1, 2, 4, 4)(7%) (1, 1, 1, 2, 3, 4)(2%) (1, 1, 2, 4, 5)(2%) (1, 1, 2, 4, 6)(12%)	8%	(1, 1, 2)(7%) (1, 1, 4)(2%)		
$V_{10,4}$	13%	(1, 3, 3, 6)(3%) (1, 1, 3, 3, 6)(3%) (1, 3, 4, 6)(3%) (1, 3, 5, 6)(5%)	53%	(1, 1, 3, 3)(3%) (1, 1, 3, 4)(3%) (1, 1, 3)(8%) (1, 3, 3)(5%) (1, 3, 4)(13%) (1, 3, 5)(5%) (1, 3, 6)(8%) (1, 2, 3)(10%)	35%	(1, 3) (35%)
$V_{10,5}$					100%	() (100%)
$V_{10,6}$	33%	(1, 1, 2, 2, 2)(2%) (1, 1, 1, 2, 3)(5%) (1, 2, 2, 3)(13%) (1, 2, 2, 3, 3)(4%) (1, 2, 2, 3, 4)(2%) (1, 2, 2, 3, 5)(5%) (1, 1, 1, 2, 3, 5)(2%)	13%	(1, 2, 2) (13%)	55%	(1, 3) (55%)
$V_{10,7}$			100%	(3) (100%)		
$V_{10,8}$	4%	(1, 1, 5, 6)(2%) (1, 1, 4, 5)(2%)	22%	(1, 1, 6)(4%) (1, 1, 4)(6%) (1, 1, 5)(13%)	74%	(1, 1) (74%)
$V_{10,9}$	8%	(1, 1, 4, 4, 6)(4%) (1, 1, 3, 3, 5)(4%)	2%	(1, 1, 3) (2%)	90%	(1, 1) (90%)
$V_{10,10}$	44%	(1, 1, 3, 3)(30%) (1, 1, 1, 2, 3)(5%) (1, 1, 3, 3, 5)(7%) (1, 1, 1, 2, 3, 5)(2%)	9%	(1, 1, 3) (9%)	47%	(1, 1) (47%)
$V_{10,11}$	17%	(1, 3, 4, 4)(10%) (1, 2, 3, 3, 5)(2%) (1, 3, 5, 6)(4%)	13%	(1, 3, 4)(6%) (1, 3, 5)(2%) (1, 3, 3)(4%)	71%	(1, 3) (71%)
$V_{10,12}$			5%	(1, 6, 6)(2%) (5, 6)(3%)	95%	()(62%) (1)(10%) (3)(5%) (4)(3%) (5)(8%) (6)(7%)

Tabelle B.5. Kodimension 10. Notation wie Tabelle B.1, Fortsetzung auf nächster Seite.

Komp.	Darboux Integral		Darb. Integr. Faktor		kein Darboux	
	Anteil	Grade	Anteil	Grade	Anteil	Grade
$V_{10,13}$	13%	(1, 3, 3, 6)(7%) (1, 3, 5, 6)(7%)	50%	(1, 3, 4)(24%) (1, 3, 5)(7%) (1, 3, 6)(2%) (1, 1, 3)(7%) (1, 2, 3)(2%) (1, 3, 3)(9%)	37%	(1, 3) (37%)
$V_{10,14}$	40%	(1, 1, 3, 3)(29%) (1, 1, 1, 2, 3)(5%) (1, 1, 3, 3, 5)(5%)	5%	(1, 1, 3) (5%)	55%	(1, 1) (55%)
$V_{10,15}$	13%	(1, 1, 5, 6)(4%) (1, 1, 3, 4, 5)(4%) (1, 1, 4, 5)(6%)	9%	(1, 1, 4)(6%) (1, 1, 5)(4%)	77%	(1, 1) (77%)
$V_{10,16}$			54%	(1, 1, 4)(50%) (1, 1, 1, 3)(4%)	46%	(4)(43%) (1, 3)(2%)
$V_{10,17}$	10%	(1, 1, 4, 4, 6) (10%)	13%	(1, 1, 6)(3%) (1, 1, 3)(6%) (1, 1, 5)(3%)	77%	(1, 1) (77%)
$V_{10,18}$	100%	(2, 4, 4, 6)(2%) (2, 4, 6, 6)(92%) (1, 2, 3, 6, 6)(7%)				
$V_{10,19}$	87%	(1, 1, 1, 2, 3)(9%) (1, 1, 2, 4)(67%) (1, 1, 2, 4, 6)(11%)	13%	(1, 1, 2)(9%) (1, 1, 1, 3)(2%) (1, 1, 4)(2%)		
$V_{10,20}$	33%	(1, 2, 2, 2)(2%) (2, 2, 3)(30%)			67%	(3)(60%) (1, 2)(7%)
$V_{10,21}$	35%	(1, 2, 2, 3)(18%) (1, 1, 1, 2, 3)(4%) (1, 2, 2, 3, 3)(5%) (1, 2, 2, 3, 4)(4%) (1, 2, 2, 3, 5)(2%) (1, 1, 1, 2, 3, 5)(2%)	9%	(1, 2, 2)(2%) (1, 2, 3)(7%)	56%	(1, 3)(55%) (1, 1, 2)(2%)
$V_{10,22}$			100%	(1, 1, 4)(85%) (1, 1, 1, 3)(12%) (1, 1, 1, 4)(3%)		
$V_{10,23}$	100%	(1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 26 × 6)(6%) (1, 1, 2, 4, 4, 4, 26 × 6)(34%) (1, 2, 3, 28 × 6)(4%) (2, 4, 28 × 6)(57%)				
$V_{10,24}$	6%	(2, 2, 5, 6)(2%) (2, 2, 3, 4)(4%)	23%	(2, 2, 4)(10%) (2, 2, 5)(4%) (1, 2, 2)(2%) (1, 2, 2, 2)(2%) (2, 2, 3)(6%)	71%	() (60%) (2, 2)(8%) (2)(4%)
$V_{10,25}$			100%	(1, 1, 4)(95%) (1, 1, 1, 3)(5%)		

Fortsetzung von Tabelle B.5, Fortsetzung auf nächster Seite.

Komp.	Darboux Integral		Darb. Integr. Faktor		kein Darboux	
	Anteil	Grade	Anteil	Grade	Anteil	Grade
$V_{10,26}$			47%	(1, 1, 2, 2)(11%) (2, 2, 2)(37%)	53%	(2) (53%)
$V_{10,27}$			100%	(1, 1, 4)(90%) (1, 1, 1, 3)(10%)		
$V_{10,28}$			13%	(1, 1, 6)(3%) (1, 1, 3)(5%) (1, 1, 4)(5%)	88%	()(47%) (1, 1)(41%)
$V_{10,29}$	5%	(1, 1, 2, 4, 4)(2%) (1, 3, 5, 5)(2%)	12%	(1, 3, 5)(5%) (1, 3, 6)(2%) (1, 3, 3)(5%)	83%	(1, 1, 2)(10%) (1, 3)(74%)
$V_{10,30}$					100%	()(86%) (3)(6%) (4)(4%) (6)(4%)
$V_{10,31}$			25%	(3, 6)(15%) (3, 3)(8%) (3, 4)(3%)	75%	(3) (75%)
$V_{10,32}$	12%	(1, 1, 5, 6)(2%) (1, 1, 3, 4, 5)(3%) (1, 1, 4, 5)(7%)	22%	(1, 1, 6)(3%) (1, 1, 4)(12%) (1, 1, 5)(7%)	66%	(1, 1) (66%)
$V_{10,33}$	11%	(1, 1, 2, 6, 6) (11%)	89%	(1, 1, 2) (89%)		
$V_{10,34}$	90%	(1, 1, 2, 4)(73%) (1, 1, 1, 2, 3)(2%) (1, 1, 2, 4, 4)(8%) (1, 1, 2, 4, 6)(8%)	10%	(1, 1, 2)(6%) (1, 1, 4)(4%)		
$V_{10,35}$	2%	(1, 1, 2, 6, 6) (2%)	98%	(1, 1, 2) (98%)		
$V_{10,36}$	24%	(1, 1, 2, 6, 6)(12%) (1, 1, 2, 4, 4)(12%)	76%	(1, 1, 2) (76%)		
$V_{10,37}$	7%	(1, 3, 4, 5)(5%) (1, 3, 3, 6)(2%)	63%	(1, 3, 4)(10%) (1, 3, 5)(17%) (1, 3, 6)(20%) (1, 1, 3)(7%) (1, 2, 3)(7%) (1, 1, 1, 3)(2%)	29%	(1, 3) (29%)
$V_{10,38}$	17%	(1, 2, 3, 5)(4%) (1, 2, 2, 3, 5)(2%) (1, 2, 4, 6)(4%) (1, 2, 2, 4, 5)(6%)	33%	(1, 2, 5)(6%) (1, 2, 4)(27%)	50%	(1, 2) (50%)
$V_{10,39}$	100%	(1, 3, 3, 3, 27 × 6)(89%) (1, 1, 3, 3, 3, 5, 26 × 6)(11%)				
$V_{10,40}$	12%	(1, 3, 4, 5)(9%) (1, 3, 3, 6)(3%)	50%	(1, 3, 4)(15%) (1, 3, 5)(15%) (1, 3, 6)(15%) (1, 1, 3)(3%) (1, 2, 3)(3%)	38%	(1, 3) (38%)
$V_{10,41}$	5%	(1, 1, 2, 2, 3, 5)(3%) (1, 2, 2, 4, 5)(3%)	13%	(1, 2, 5)(8%) (1, 2, 4)(5%)	83%	(1, 2) (83%)

Fortsetzung von Tabelle B.5.

Komp.	Darboux Integral		Darb. Integr. Faktor		kein Darboux	
	Anteil	Grade	Anteil	Grade	Anteil	Grade
$V_{11,1}$	100%	(1, 4, 5)(88%) (1, 1, 3, 5)(13%)				
$V_{11,2}$	100%	(2, 4, 6)(76%) (1, 2, 4, 5)(20%) (2, 2, 4, 4)(4%)				
$V_{11,3}$	100%	(2, 3, 3, 5)(81%) (1, 1, 3, 3, 5)(12%) (1, 2, 2, 3, 5)(8%)				
$V_{11,4}$			16%	(1, 1, 6) (16%)	84%	(1) (84%)
$V_{11,5}$			3%	(1, 1, 6) (3%)	97%	(1) (97%)
$V_{11,6}$	100%	(1, 2, 4, 6)(81%) (1, 1, 2, 4, 5)(19%)				
$V_{11,7}$			100%	(1, 3) (100%)		
$V_{11,8}$			100%	(5, 5)(91%) (1, 5, 5)(9%)		
$V_{11,9}$			100%	(1, 1, 3) (100%)		
$V_{11,10}$			100%	(1, 1, 3) (100%)		
$V_{11,11}$			100%	(4) (100%)		
$V_{11,12}$	100%	(1, 1, 5, 6) (100%)				
$V_{11,13}$			100%	(2, 6) (100%)		
$V_{11,14}$			100%	(1, 3) (100%)		
$V_{11,15}$			100%	(1, 3)(94%) (1, 1, 3)(6%)		
$V_{11,16}$			100%	(1, 1, 3) (100%)		
$V_{11,17}$					100%	(5) (100%)
$V_{11,18}$	100%	(1, 1, 4, 4, 6)(94%) (1, 1, 2, 2, 4, 6)(6%)				
$V_{11,19}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,20}$	100%	(1, 4, 5)(97%) (1, 1, 4, 4)(3%)				
$V_{11,21}$					100%	(1)(87%) (1, 1)(13%)
$V_{11,22}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,23}$	100%	(1, 1, 5, 6)(94%) (1, 1, 1, 5, 6)(6%)				
$V_{11,24}$	100%	(1, 1, 3, 5)(26%) (1, 3, 6)(74%)				
$V_{11,25}$	100%	(1, 2, 4, 6)(86%) (1, 1, 2, 4, 5)(14%)				
$V_{11,26}$	100%	(1, 2, 4, 4) (100%)				
$V_{11,27}$	100%	(1, 1, 4, 4, 6)(75%) (1, 1, 1, 4, 4, 5)(9%) (1, 1, 2, 2, 4, 6)(16%)				

Tabelle B.6. Kodimension 11. Notation wie Tabelle B.1, Fortsetzung auf nächster Seite.

Komp.	Darboux Integral		Darb. Integr. Faktor		kein Darboux	
	Anteil	Grade	Anteil	Grade	Anteil	Grade
$V_{11,28}$			100%	(3, 5)(91%) (1, 3, 4)(9%)		
$V_{11,29}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,30}$					100%	(1)(92%) (1, 1)(8%)
$V_{11,31}$	100%	(1, 1, 2, 4, 4, 6)(8%) (1, 2, 4, 4)(92%)				
$V_{11,32}$			100%	(1, 2, 2) (100%)		
$V_{11,33}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,34}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,35}$	100%	(1, 1, 5, 6) (100%)				
$V_{11,36}$			100%	(1, 1, 4) (100%)		
$V_{11,37}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,38}$			10%	(1, 1, 6) (10%)	90%	(1) (90%)
$V_{11,39}$	100%	(2, 2, 4)(89%) (1, 2, 2, 3)(11%)				
$V_{11,40}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,41}$					100%	(5) (100%)
$V_{11,42}$	100%	(1, 1, 3, 5, 6) (100%)				
$V_{11,43}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,44}$			21%	(1, 1, 6) (21%)	79%	(1) (79%)
$V_{11,45}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,46}$			100%	(3, 6)(87%) (3, 3, 3)(13%)		
$V_{11,47}$	100%	(1, 4, 5)(98%) (1, 1, 4, 4)(2%)				
$V_{11,48}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,49}$			100%	(1, 1, 3) (100%)		
$V_{11,50}$	100%	(1, 2, 3, 4)(97%) (1, 2, 2, 2, 3)(3%)				
$V_{11,51}$			2%	(1, 4, 6) (2%)	98%	(4)(89%) (1, 4)(9%)
$V_{11,52}$			100%	(1, 3) (100%)		
$V_{11,53}$			100%	(1, 1, 4) (100%)		
$V_{11,54}$			100%	(3, 3) (100%)		
$V_{11,55}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,56}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,57}$					100%	(4)(83%) (1, 4)(17%)
$V_{11,58}$	100%	(1, 3, 6)(81%) (1, 1, 3, 5)(19%)				
$V_{11,59}$	100%	(1, 1, 2, 2, 4, 6)(13%) (1, 1, 4, 4, 6)(84%) (1, 1, 1, 4, 4, 5)(3%)				

Fortsetzung von Tabelle B.6, Fortsetzung auf nächster Seite.

Komp.	Darboux Integral		Darb. Integr. Faktor		kein Darboux	
	Anteil	Grade	Anteil	Grade	Anteil	Grade
$V_{11,60}$					100%	(4) (100%)
$V_{11,61}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,62}$			100%	(2, 4)(96%) (2, 2, 2)(4%)		
$V_{11,63}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,64}$	100%	(1, 2, 3, 4)(90%) (1, 2, 2, 2, 3)(10%)				
$V_{11,65}$					100%	(1)(84%) (1, 1)(16%)
$V_{11,66}$	100%	(2, 3, 3)(92%) (1, 2, 2, 3)(8%)				
$V_{11,67}$			100%	(1, 3) (100%)		
$V_{11,68}$	100%	(1, 4, 5)(76%) (1, 1, 3, 5)(24%)				
$V_{11,69}$			100%	(1, 3)(90%) (1, 1, 3)(10%)		
$V_{11,70}$			100%	(3, 5) (100%)		
$V_{11,71}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,72}$			100%	(1, 1, 4) (100%)		
$V_{11,73}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,74}$					100%	(6) (100%)
$V_{11,75}$	100%	(1, 1, 5, 5)(68%) (1, 1, 1, 4, 5)(22%) (1, 1, 2, 3, 5)(10%)				
$V_{11,76}$					100%	() (100%)
$V_{11,77}$			100%	(1, 1, 4) (100%)		
$V_{11,78}$			100%	(1, 3) (100%)		
$V_{11,79}$			100%	(1, 1, 3) (100%)		
$V_{11,80}$					100%	(1)(93%) (1, 1)(7%)
$V_{11,81}$					100%	(1)(94%) (1, 1)(6%)
$V_{11,82}$			100%	(2, 2) (100%)		
$V_{11,83}$	100%	(1, 1, 5, 5)(74%) (1, 1, 1, 4, 5)(18%) (1, 1, 2, 3, 5)(9%)				
$V_{11,84}$					100%	(2) (100%)
$V_{11,85}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,86}$			100%	(1, 3) (100%)		
$V_{11,87}$			100%	(1, 1, 3) (100%)		
$V_{11,88}$					100%	()(89%) (1, 6)(11%)

Fortsetzung von Tabelle B.6, Fortsetzung auf nächster Seite.

Komp.	Darboux Integral		Darb. Integr. Faktor		kein Darboux	
	Anteil	Grade	Anteil	Grade	Anteil	Grade
$V_{11,89}$	100%	(1, 1, 5, 5)(67%) (1, 1, 1, 4, 5)(18%) (1, 1, 2, 3, 5)(15%)				
$V_{11,90}$					100%	(2) (100%)
$V_{11,91}$			100%	(2, 6) (100%)		
$V_{11,92}$					100%	(2) (100%)
$V_{11,93}$					100%	(2) (100%)
$V_{11,94}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,95}$					100%	(1) (100%)
$V_{11,96}$			100%	(1, 1, 3) (100%)		
$V_{11,97}$			100%	(1, 1, 3) (100%)		

Fortsetzung von Tabelle B.6.

B.2. Żořadeks Listen

Da fŭr einige Familien nur sehr wenige Differentialformen in der Datenbank vorhanden sind, sind hier noch einmal die Informationen der Tabellen 5.1 und 5.2 mit absoluten Zahlen aufgefŭhrt.

Familie	Varietäten	Familie	Varietäten
CD_1 ($Rk7$)	$V(I_{7,3})$ (939/1439) $V(I_{7,4})$ (1439/1439)	CD_{14} ($Rk7$)	$V(I_{7,2})$ (106/106)
CD_2 ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ (158/158) $V(I_{7,4})$ (158/158)	CD_{15} ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ (72/72) $V(I_{7,4})$ (72/72)
CD_2 ($Rk7$)	$V(I_{7,2})$ (85/1307) $V(I_{7,4})$ (1222/1307)	CD_{16} ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ (76/76) $V(I_{7,4})$ (76/76)
CD_3 ($Rk5$)	$V(I_{5,1})$ (77/77) $V(I_{6,1})$ (77/77) $V(I_{7,2})$ (77/77) $V(I_{7,4})$ (77/77)	CD_{19} ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ (103/103) $V(I_{7,4})$ (103/103)
CD_3 ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ (1468/1468) $V(I_{7,4})$ (1468/1468)	CD_{21} ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ (112/112) $V(I_{7,4})$ (112/112)
CD_4 ($Rk5$)	$V(I_{5,1})$ (88/88) $V(I_{6,1})$ (88/88) $V(I_{7,2})$ (88/88) $V(I_{7,4})$ (88/88)	CD_{21} ($Rk9$)	$V(I_{9,5})$ (1202/1202)
CD_4 ($Rk7$)	$V(I_{7,2})$ (1306/1306)	CD_{22} ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ (98/98) $V(I_{7,4})$ (98/98)
CD_5 ($Rk5$)	$V(I_{5,1})$ (1323/1323) $V(I_{6,1})$ (1323/1323) $V(I_{7,2})$ (1323/1323) $V(I_{7,4})$ (1323/1323)	CD_{23} ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ (88/88) $V(I_{7,4})$ (88/88)
CD_7 ($Rk8$)	$V(I_{8,1})$ (1438/1438)	CD_{25} ($Rk7$)	$V(I_{7,4})$ (63/63)
CD_8 ($Rk9$)	$V(I_{9,2})$ (1550/1550)	CD_{25} ($Rk9$)	$V(I_{9,4})$ (82/155) $V(I_{9,7})$ (73/155)
CD_{10} ($Rk10$)	$V(I_{10,7})$ (1550/1550)	CD_{25} ($Rk10$)	$V(I_{10,34})$ (1051/1051)
CD_{13} ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ (122/122) $V(I_{7,4})$ (122/122)	CD_{27} ($Rk7$)	$V(I_{7,4})$ (170/170)
CD_{14} ($Rk6$)	$V(I_{6,1})$ (89/89) $V(I_{7,4})$ (89/89)	CD_{27} ($Rk10$)	$V(I_{10,3})$ (1125/1125)
		CD_{28} ($Rk7$)	$V(I_{7,1})$ (1081/1153) $V(I_{7,4})$ (72/1153)
		CD_{28} ($Rk9$)	$V(I_{9,14})$ (176/176)
		CD_{30} ($Rk9$)	$V(I_{9,11})$ (1419/1419)
		CD_{31} ($Rk11$)	$V(I_{11,24})$ (1353/1353)
		CD_{35} ($Rk7$)	$V(I_{7,4})$ (188/188)
		CD_{35} ($Rk8$)	$V(I_{7,4})$ (1014/1014) $V(I_{8,3})$ (1014/1014)

Tabelle B.7. Darboux-Familien mit absoluten Werten.

Familie	Varietäten	Familie	Varietäten
$CR_1(Rk6)$	$V(I_{6,1})(2/1302)$	$CR_9(Rk9)$	$V(I_{9,1})(1146/1146)$
	$V(I_{6,2})(1300/1302)$	$CR_{10}(Rk6)$	$V(I_{6,1})(107/107)$
	$V(I_{7,2})(1300/1302)$		$V(I_{7,4})(107/107)$
	$V(I_{7,4})(2/1302)$	$CR_{10}(Rk9)$	$V(I_{9,5})(1259/1259)$
	$V(I_{8,2})(1300/1302)$	$CR_{12}(Rk6)$	$V(I_{6,1})(109/109)$
	$V(I_{9,5})(1300/1302)$		$V(I_{7,4})(109/109)$
	$V(I_{9,7})(1300/1302)$	$CR_{12}(Rk7)$	$V(I_{7,4})(1256/1256)$
	$V(I_{9,11})(1300/1302)$	$CR_{13}(Rk6)$	$V(I_{6,1})(75/75)$
	$V(I_{10,12})(1300/1302)$		$V(I_{7,4})(75/75)$
$CR_2(Rk7)$	$V(I_{7,2})(1/90)$	$CR_{14}(Rk6)$	$V(I_{6,1})(16/16)$
	$V(I_{7,4})(89/90)$		$V(I_{7,4})(16/16)$
$CR_2(Rk8)$	$V(I_{7,4})(1099/1099)$	$CR_{14}(Rk7)$	$V(I_{7,2})(2/2)$
	$V(I_{8,4})(1099/1099)$	$CR_{14}(Rk8)$	$V(I_{8,1})(3/1222)$
$CR_4(Rk7)$	$V(I_{7,4})(156/156)$		$V(I_{8,2})(1219/1222)$
	$V(I_{7,4})(1268/1268)$		$V(I_{10,12})(1219/1222)$
$CR_4(Rk8)$	$V(I_{8,3})(1268/1268)$	$CR_{14}(Rk9)$	$V(I_{9,2})(2/2)$
	$V(I_{7,2})(1188/1188)$	$CR_{15}(Rk6)$	$V(I_{6,1})(89/89)$
$CR_5(Rk7)$	$V(I_{7,4})(78/78)$		$V(I_{7,4})(89/89)$
$CR_6(Rk8)$	$V(I_{7,4})(1292/1292)$	$CR_{15}(Rk8)$	$V(I_{8,1})(110/110)$
	$V(I_{8,3})(1292/1292)$	$CR_{15}(Rk9)$	$V(I_{9,2})(74/1253)$
$CR_7(Rk7)$	$V(I_{7,2})(1174/1174)$		$V(I_{9,4})(1179/1253)$
$CR_8(Rk6)$	$V(I_{6,1})(90/90)$	$CR_{16}(Rk6)$	$V(I_{6,1})(95/95)$
	$V(I_{7,4})(90/90)$		$V(I_{7,4})(95/95)$
$CR_9(Rk6)$	$V(I_{6,1})(189/189)$	$CR_{16}(Rk7)$	$V(I_{7,2})(53/1298)$
	$V(I_{7,4})(189/189)$		$V(I_{7,4})(1245/1298)$
$CR_9(Rk7)$	$V(I_{7,2})(5/5)$		

Tabelle B.8. Rational reversible Familien mit absoluten Werten.

Literaturverzeichnis

- [GS] Daniel R. Grayson und Michael E. Stillman. Macaulay 2, a software system for research in algebraic geometry. Verfügbar unter <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>
- [Rhe08] Ulrich Paul Rhein. Das Poincarésche Zentrumsproblem: Komponenten der Zentrumsvarietät. Diplomarbeit, Leibniz Universität Hannover, 2008. Verfügbar unter <http://www.crcg.de/wiki/images/7/7b/DaRhein.pdf>
- [Sha94] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1*. Springer-Verlag, 2. Edition, 1994.
- [Ste11] Johannes Steiner. LiftpointInterpolation, ein Package für Macaulay2 zur Berechnung von Idealen und Integralkurven mit Hilfe von centerfocus und die dieser Arbeit zugrunde liegenden Daten, 2011. Verfügbar unter <http://sourceforge.net/projects/centerfocus/>
- [vB05] H.-C. Graf v. Bothmer. Experimental results for the Poincaré center problem. math.AG/0505547, 2005.
- [vB10] H.-C. Graf v. Bothmer. Pers. Mitteilung, 2010.
- [vBK09] H.-C. Graf v. Bothmer und Jakob Kröker. Focal values of plane cubic centers. math.AG/0902.3415, 2009.
- [vBK10a] H.-C. Graf v. Bothmer und Jakob Kröker. A survey of the Poincaré center problem in degree 3 using finite field heuristics. math.AG/1012.3402, 2010.
- [vBK10b] H.-C. Graf v. Bothmer und Jakob Kröker. Datenbank mit Differentialformen in Charakteristik p. Verfügbar unter <http://www.centerfocus.de>, 2010.
- [vBK10c] H.-C. Graf v. Bothmer und Jakob Kröker. Implementation von Frommers Algorithmus über einem endlichen Körper. Quelltext unter <http://sourceforge.net/projects/centerfocus/>, Dokumentation unter <http://www.centerfocus.de>, 2010.
- [Żo194] Henryk Żołądek. The Classification of Reversible Cubic Systems with Center. *Topol. Methods in Nonlinear Anal.*, 4(1):79-136, 1994.

- [Żo196] Henryk Żołądek. Remarks on: The Classification of Reversible Cubic Systems with Center". *Topol. Methods in Nonlinear Anal.*, 8(2):335-342 (1997), 1996.

Danksagung

Zuallererst möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. von Bothmer für die hervorragende Betreuung bedanken. Auch Jakob Kröker, der bei technischen Fragen immer hilfsbereit zur Verfügung stand, möchte ich dafür danken.

Außerdem danke ich allen Menschen, die mir bei Problemen verschiedenster Fachrichtungen geholfen haben.

Besonderer Dank gilt Ulla, Marie-Lu und meinem Vater für die zahlreichen Hinweise und intensive Auseinandersetzung mit dieser Arbeit.

Zum Schluss möchte ich mich noch bei meiner Familie und allen, die mir auf dem Weg zum- und durch das Studium geholfen haben bedanken. Hier möchte ich besonders meinem ehemaligen Lehrer Herrn Hildebrandt und meinem Onkel danken, die mir die Mathematik schon früh näher gebracht haben und noch einmal Prof. Dr. von Bothmer erwähnen, der schon in den ersten beiden Semestern mein Interesse an der algebraischen Geometrie geweckt hat.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig verfasst, noch nicht anderweitig für Prüfungszwecke vorgelegt, keine anderen als die angegebenen Quellen oder Hilfsmittel verwendet sowie wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet habe.

Göttingen, den 21. Januar 2011

JOHANNES STEINER